Exercice| [2763] | 1| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$

Soit $B = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P : x \longmapsto ax^2 + (b-2a)x + a - b + c,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

(1). Donner un exemple d'un polynôme $P \in B$.

(2). Le polynôme $Q : x \longmapsto 2x^2 - 3x$ appartient-il à B ?

(3). Montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

(4). Montrer que : $(P \in B) \quad \Leftrightarrow \quad \left(P \in \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto x-1, x \longmapsto (x-1)^2\right)\right)$

(5). Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(x \longmapsto 1, x \longmapsto x-1, x \longmapsto (x-1)^2\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.

(6). En déduire une base et la dimension de B.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de choisir un triplet (a,b,c) et construire un polynôme sur le mode de construction des éléments de B.

(2). Il s'agit de faire le travail inverse ici en essayant de reconstituer un triplet (a,b,c) de sorte que le polynôme Q s'obtiennent à partir de ce triplet et du mode de construction des éléments de B.

(3). On commencera par vérifier que B est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}_2[x]$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[x]$, et pour la stabilité par combinaison linéaire, on vérifiera que l'élement fabriqué par combinaison linéaire satisfait à la relation permettant de définir les éléments de B.

(4). On essaiera de regrouper différemment les monômes constituant l'écriture d'un élément de B de sorte à voir ce dernier comme la combinaison linéaire de plusieurs polynômes à identifier.

(5). Le caractère libre de la famille est immédiat si l'on observe les degrés des polynômes la constituant.

(6). On dispose d'une famille libre et génératrice...

Éléments de correction

(1). En prenant $(a,b,c) = (1,1,1)$, il vient que le polynôme

$$P : x \longmapsto \underbrace{\underbrace{1}_{=1} + \underbrace{(1-2\times 1)}_{=-1} x + \underbrace{1-1+1}_{=+1}}_{=x^2-x+1}$$

appartient à B.

(2). Par définition de B, on a :

$$(Q \in B) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ n2x^2 - 3x = ax^2 + (b-2a)\,x + a - b + c\right)$$

Ainsi, par identification des coefficients des polynômes, un tel triplet (a,b,c) existe si, et seulement si il est solution du système $\begin{cases} a & = 2 \\ -2a + b & = -3 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$.

De L_1 on tire que $a = 2$, puis de L_2 que $b = 1$, ce qui amène par L_3 que $c = -1$.
Par conséquent, le polynôme Q appartient à B puisqu'obtenu à partir du triplet $(2,1,-1)$.

(3). **B est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_2[x]$:** par construction de B.

Le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[x]$ appartient à B : en effet, en posant $(a,b,c) = (0,0,0)$, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{0 \times x^2 + (0 - 2\times 0)\,x + 0 - 0 + 0}_{=0} = \underbrace{\tilde{0}(x)}_{=0}$

Stabilité par combinaison linéaire : soit $\begin{cases} P_1 & \in & B \\ P_2 & \in & B \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

Posons $P_3 = \lambda P_1 + P_2$ et montrons que $P_3 \in B$, c'est à dire qu'il existe $(a_3,b_3,c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_3(x) = a_3x^2 + (b_3 - 2a_3)\,x + a_3 - b_3 + c_3$.
Puisque $P_1 \in B$, il existe $(a_1,b_1,c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = a_1x^2 + (b_1 - 2a_1)\,x + a_1 - b_1 + c_1$$

De même, puisque $P_2 \in B$, il existe $(a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_2(x) = a_2x^2 + (b_2 - 2a_2)\,x + a_2 - b_2 + c_2$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R},\ P_3(x) & = & (\lambda P_1 + P_2)\,(x) \\ & = & \lambda P_1(x) + P_2(x) \\ & = & \lambda\left(a_1x^2 + (b_1 - 2a_1)\,x + a_1 - b_1 + c_1\right) + a_2x^2 + (b_2 - 2a_2)\,x \\ & & + a_2 - b_2 + c_2 \\ & = & \lambda a_1x^2 + \lambda\,(b_1 - 2a_1)\,x + \lambda\,(a_1 - b_1 + c_1) + a_2x^2 \\ & & + (b_2 - 2a_2)\,x + a_2 - b_2 + c_2 \\ & = & (\lambda a_1 + a_2)\,x^2 + (\lambda\,(b_1 - 2a_1) + b_2 - 2a_2)\,x + \lambda\,(a_1 - b_1 + c_1) \\ & & + a_2 - b_2 + c_2 \\ & = & \underbrace{(\lambda a_1 + a_2)}_{=a_3} x^2 + \big(\underbrace{\lambda b_1 + b_2}_{=b_3} - 2\underbrace{(\lambda a_1 + a_2)}_{=a_3}\big)\,x \\ & & + \underbrace{(\lambda a_1 + a_2)}_{=a_3} - \underbrace{(\lambda b_1 + b2)}_{=b_3} + \underbrace{(\lambda c_1 + c_2)}_{=c_3} \\ & = & a_3x^2 + (b_3 - 2a_3)\,x + a_3 - b_3 + c_3 \end{array}$$

ce qui assure que $P_3 \in B$.

(4). Il est immédiat que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + (b-2a)\,x + a - b + c = a\underbrace{\left(x^2 - 2x + 1\right)}_{=(x-1)^2} + b\,(x-1) + c$$

Ainsi, B est clairement l'ensemble des combinaisons linéaires des polynômes $x \longmapsto 1$, $x \longmapsto x-1$ et $x \longmapsto (x-1)^2$.
On en déduit donc que $B = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto x-1, x \longmapsto (x-1)^2\right)$.

(5). La famille $\mathcal{B} = \left\{x \longmapsto 1, x \longmapsto x-1, x \longmapsto (x-1)^2\right\}$ est un famille de polynômes de degrés échelonnées, donc par théorème, c'est une famille libre.

(6). La famille $\mathcal{B} = \left\{x \longmapsto 1, x \longmapsto x-1, x \longmapsto (x-1)^2\right\}$ est un famille libre et génératrice de B, donc elle en forme une base.
La dimension de B étant égale au nombre de vecteurs d'une de ses bases, on en déduit que $\dim(B) = 3$.