Exercice| [2740] | 1| Sytème linéaire 3×3

Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnue le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x - y + 2z = 9 \\ -x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + \ \ z = 8 \end{cases}$$

Pistes de réflexion

— On résoudra ce système linéaire de taille 3×3 par échelonnement réduit de sa représentation matricielle.

Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{4}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

On en déduit les relations :

$$\begin{cases} x & = & 2 \\ y & = & -1 \\ z & = & 3 \end{cases}$$

et par suite l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ est $\{(2, -1, 3)\}$.