Exercice| [2701] | 1| Manipuler une somme géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{\frac{k}{2}} = \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1} - 1}{6}$.

Pistes de réflexion

- On essaiera de transformer les termes généraux des sommes de sorte à ramener les sommes à une forme du type $\sum q^k$.
- On mettra en oeuvre ensuite la formule correspondante, en gérant au mieux la plage d'indexation.

Éléments de correction

On a directement que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{\frac{k}{2}} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^k \\
&\underset{2^{\frac{1}{2}} \neq 1}{=} \frac{1 - \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2n-1+1}}{1 - 2^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1 - \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}}{1 - 2^{\frac{1}{2}}} \\
&\underset{2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}}{=} \frac{1 - 2^n}{1 - \sqrt{2}} \\
&= \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}
\end{aligned}$$

Sur le même principe :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} &= \sum_{k=0}^{2n} \left(2^2\right)^k \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} 4^k \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1 - 4^{2n+1}}{1 - 4} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1 - 4^{2n+1}}{-3} \\
&= \frac{1 - 4^{2n+1}}{-6} \\
&= \frac{4^{2n+1} - 1}{6}
\end{aligned}$$