Exercice| [2667] | 1| Polynômes d'interpolation de Lagrange

On se propose de déterminer dans cet exercice le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition suivante :

$$(\star) : \begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2 \end{cases} \quad \text{où } (x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$$

autrement dit dont la courbe représentative passe par trois points donnés du plan.

(1). Détermination par résolution de système : soit P le polynôme de degré donné par :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P satisfasse à la condition $(\star_0) : \begin{cases} P(-2) = 3 \\ P(1) = -2 \\ P(5) = 2 \end{cases}$.

(2). Mise en place de la méthode de Lagrange : on cherche dans cette question à déterminer le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition $(\star_1) : \begin{cases} P(-1) = -1 \\ P(2) = 3 \\ P(4) = 6 \end{cases}$.

(a). Déterminer le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha(x-2)(x-4) + \beta(x+1)(x-4) + \gamma(x+1)(x-2)$$

satisfasse à $(\star_1)$.
En donner ensuite son expression développée.

(b). En s'inspirant de la question précédente, déterminer un polynôme Q de degré 2 qui satisfait à la condition suivante :

$$(\star_2) : \begin{cases} Q(2) = -3 \\ Q(-5) = 1 \\ Q(-3) = -1 \end{cases}$$

En donner ensuite son expression développée.

(3). Formule d'interpolation de Lagrange : soit P un polynôme de degré 2 donné par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha(x - x_0)(x - x_1) + \beta(x - x_0)(x - x_2) + \gamma(x - x_1)(x - x_2)$$
et satisfaisant à la condition $(\star) : \begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2 \end{cases}$ où $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$ est donné tel que les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ne sont pas alignés.

(a). Déterminer α, β et γ en fonction de $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$.

(b). Donner alors l'expression développée du polynôme R satisfaisant à la condition $(\star_3)$: $\begin{cases} R(-3) = 2 \\ R(2) = -1 \\ R(4) = 7 \end{cases}$.

(4). Extension à un polynôme de degré 3 : en s'inspirant des questions précédentes et des formules de Lagrange établies pour un polynôme de degré 2, déterminer un polynôme S de degré 3 qui satisfait à la condition $(\star_4) : \begin{cases} S(-5) = 1 \\ S(-3) = -2 \\ S(2) = 1 \\ S(4) = 5 \end{cases}$ et dont on donnera ensuite la forme développée.

Pistes de réflexion

(1). Traduire en terme de système d'équations le fait que P satisfait chacune des égalités de $(\star_0)$ et le résoudre ensuite.

(2). (a). Évaluer P en -1 et voir ce qui reste... Faire de même ensuite en 2 et en 4.

(b). Construire la forme pseudo-factorisée de Q en s'inspirant de celle de P, et procéder de même pour identifier les coefficients α, β et γ.

(3). (a). Reprendre la démarche de la question précédente pour identifier le triplet (α, β, γ) dans un cadre plus général.

(b). Appliquer les résultats trouvés pour en déduire directement l'expression de P

(4). Chaque terme de la forme de Lagrange doit compter ce coup-ci 3 facteurs...

Éléments de correction

(1). En évaluant le polynôme P proposé en -2, 1 et 5, il vient :
$$P \text{ satisfait } (\star_0) \iff \begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ a + b + c = -2 \\ 25a + 5b + c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a & -2b & +c & = 3 \\ a & +b & +c & = -2 \\ 25a & +5b & +c & = 2 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{25}{4}L_1}}{\iff} \begin{cases} 4a & -2b & +c & = 3 \\ & \frac{3}{2}b & +\frac{3}{4}c & = -\frac{11}{4} \\ & \frac{35}{2}b & -\frac{21}{4}c & = -\frac{67}{4} \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{35}{3}L_2}{\iff} \begin{cases} 4a & -2b & +c & = 3 \\ & \frac{3}{2}b & +\frac{3}{4}c & = -\frac{11}{4} \\ & & -14c & = \frac{46}{3} \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{56}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{14}L_3}}{\iff} \begin{cases} 4a & -2b & & = \frac{86}{21} \\ & \frac{3}{2}b & & = -\frac{27}{14} \\ & & -14c & = \frac{46}{3} \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{3}L_2}{\iff} \begin{cases} 4a & & & = \frac{32}{21} \\ & \frac{3}{2}b & & = -\frac{27}{14} \\ & & -14c & = \frac{46}{3} \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{14}L_3}}{\iff} \begin{cases} a & & & = \frac{8}{21} \\ & b & & = -\frac{9}{7} \\ & & c & = -\frac{23}{21} \end{cases}$$

Ainsi, le polynôme P cherché est donné par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{8}{21}x^2 - \frac{9}{7}x - \frac{23}{21}}$

(2). (a). On a directement que : $P(-1) = \alpha(-1-2)(-1-4)$ et donc $-1 = 15\alpha$ ce qui donne $\boxed{\alpha = -\frac{1}{15}}$.

De même : $P(2) = \beta(2+1)(2-4)$ et donc $3 = -6\beta$ ce qui donne $\boxed{\beta = -\frac{1}{2}}$.

Et enfin : $P(4) = \gamma(4+1)(4-2)$ et donc $6 = 10\gamma$ ce qui donne $\boxed{\gamma = \frac{3}{5}}$.

En développant, on obtient alors : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{1}{30}x^2 + \frac{13}{10}x + \frac{4}{15}}$.

(b). On cherche l'expression de Q sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \alpha(x-2)(x+5) + \beta(x-2)(x+3) + \gamma(x+5)x+3)$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sera déterminé par $(\star_2)$.
Sur le même principe alors que la question précédente, n a directement que : $Q(2) = \gamma(2+5)(2+3)$ et donc $-3 = 35\gamma$ ce qui donne $\boxed{\gamma = -\frac{3}{35}\gamma}$.

De même : $Q(-5) = \beta(-5-2)(-5+3)$ et donc $1 = 14\beta$ ce qui donne $\boxed{\beta = \dfrac{1}{14}\beta}$.

Et enfin : $Q(-3) = \alpha(-3-2)(-3+5)$ et donc $-1 = -10\alpha$ ce qui donne $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{10}}$.

En développant, on obtient alors : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \dfrac{3}{35}x^2 - \dfrac{11}{35}x - \dfrac{19}{7}}$

(3). (a). On a directement que $P(x_0) = \gamma(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ et donc $\boxed{\gamma = \dfrac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}}$.

De même : $P(x_1) = \beta(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$ et donc $\boxed{\beta = \dfrac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}}$.

Et on a : $P(x_2) = \alpha(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ et donc $\boxed{\alpha = \dfrac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}}$.

(b). En appliquant les formules précédemment trouvées à la condition $(\star_3)$ pour R en écrivant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $SR(x) = \alpha(x+3)(x-2) + \beta(x+3)(x-4) + \gamma(x-2)(x-4)$, il vient que $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{10}$ et $\gamma = \dfrac{2}{35}$ ce qui donne pour expression développée pour S : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \dfrac{23}{25}x^2 + \dfrac{2}{35}x - \dfrac{131}{35}}$

(4). On cherche le polynôme S sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha(x+5)(x+3)(x-2) + \beta(x+5)(x+3)(x-4) + \gamma(x+3)(x-2)(x-4) + \delta(x+5)(x-2)(x-4)$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.
En évaluant en -5, puis en -2, puis en 2 et finalement en 4 comme précédemment, on obtient que $\alpha = \dfrac{5}{126}$, $\beta = -\dfrac{1}{70}$, $\delta = -\dfrac{1}{35}$ et $\gamma = -\dfrac{1}{126}$.
On en déduit alors l'expression développée de S : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = -\dfrac{1}{90}x^3 + \dfrac{7}{30}x^2 + \dfrac{41}{45}x - \dfrac{5}{3}}$.