Exercice| [2642] | 1| Parité d'une fonction

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} + \ln\left(x^2\right)$.

(1). Déterminer le domaine de définition de f.

(2). Étudier la parité de la fonction.

Pistes de réflexion

(1). L'expression algébrique est conditionnée par deux expressions dont il faudra combiner les conditions imposées à la variable pour déterminer le domaine de définition de f.

(2). On commence par s'assurer du caractère symétrique du domaine de définition de f, puis on comparera $f(-x)$ et $f(x)$.

Éléments de correction

(1). L'expression $\dfrac{1}{x^2} + \ln\left(x^2\right)$ n'a de sens que si l'expression $\dfrac{1}{x^2}$ a du sens, c'est à dire si son dénominateur ne s'annule pas, et si l'expression $\ln\left(x^2\right)$ a du sens, c'est à dire si $x^2 > 0$.

Il est immédiat que : $\left(x^2 = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0)$

et on a clairement que : $\left(x^2 > 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in]-\infty; 0[\cup \infty 0, +\infty)$

Par suite, on en déduit que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

(2). Le domaine de définition de f est clairement symétrique par rapport à 0.

On a alors :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) &= \frac{1}{(-x)^2} + \ln\left((-x)^2\right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \ln\left(x^2\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

et par suite f est une fonction paire.