## Exercice| [2641] | 1| Composition de fonctions

Soient $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$.
Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que leur ensemble de définition.

## Pistes de réflexion

- L'expression des composées $f \circ g$ et $g \circ f$ s'obtiennent en substituant $x$ dans l'expression de l'une par l'expression de l'autre. . .mais dans le « bon sens »
- On peut trouver les domaines de définition à partir d'une étude de fonction de $f$ et $g$, puisque par exemple l'écriture $f(g(x))$ n'a de sens que si $g(x)$ appartient au domaine de définition de $f$.

## Éléments de correction

**Étude de la fonction $f$ :** la fonction $f$ est clairement définie sur $\mathcal{D}_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$.
Cette dernière est clairement continue et dérivable sur chacun des deux intervalles constituant $\mathcal{D}_f$, et on a :

$$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[\,,\ f'(x) = -\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{<0}$$

On en déduit donc les variations de $f$ sur $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | | \|\| | $-$ | |
| Variations de $f$ | $1$ | $\searrow$ $-1$ | $\searrow$ $-\infty$ | \|\| | $+\infty$ $\searrow$ | $1$ |

Le théorème des valeurs intermédiares permet d'affirmer que $f$ ne peut prendre la valeur $-1$ qu'une et une seule fois, en $x = -\dfrac{1}{2}$ que l'on obtient en résolvant l'équation $f(x) = -1$.

**Étude de la fonction $g$ :** la fonction $g$ est clairement définie sur $\mathcal{D}_g = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$.
Cette dernière est clairement continue et dérivable sur chacun des deux intervalles constituant $\mathcal{D}_g$, et on a :

$$\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[\,,\ g'(x) = -\underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{<0}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | |
| Variations de $g$ | $0$ | $\searrow$ $-\infty$ | \|\| | $+\infty$ $\searrow$ | $0$ |

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $g$ ne peut prendre la valeur $0$.

**Étude de la composée $f \circ g$ :** Par définition, il s'agit de la fonction $x \longmapsto f\left(g(x)\right)$.
Cette dernière est donc définie uniquement pour les valeurs de $x$ telles que $g(x)$ appartient à $\mathcal{D}_f$, c'est à dire telles que $g(x) \neq 0$. Or l'étude précédente a montré que la fonction $g$ ne s'annule pas sur $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$.
Ainsi, pour tout $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$, l'expression $f\left(g(x)\right)$ a du sens, et on en déduit que $\mathcal{D}_{f \circ g} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$.
Par ailleurs, il vient alors que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[\,,\ f \circ g(x) &= f\left(g(x)\right) \\
&= \frac{g(x)+1}{g(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{x+1}+1}{\frac{1}{x+1}} \\
&= \left(\frac{1}{x+1}+1\right) \times (x+1) \\
&= \frac{x+1}{x+1} + x + 1 \\
&= x + 2
\end{aligned}$$

**Étude de la composée $g \circ f$ :** Par définition, il s'agit de la fonction $x \longmapsto g\left(f(x)\right)$.
Cette dernière est donc définie uniquement pour les valeurs de $x$ telles que $f(x)$ appartient à $\mathcal{D}_g$, c'est à dire telles que $f(x) \neq -1$. Or l'étude précdente a montré que la fonction $f$ ne prend pas la valeur sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]-\frac{1}{2}; 0\right[ \cup ]0; +\infty[$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]-\frac{1}{2}; 0\right[ \cup ]0; +\infty[$, l'expression $g\left(f(x)\right)$ a du sens, et on en déduit que $\mathcal{D}_{g \circ f} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]-\frac{1}{2}; 0\right[ \cup ]0; +\infty[$.

Par ailleurs, il vient alors que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup]0;+\infty[,\ g\circ f(x) &= g\left(f(x)\right)\\ &= \frac{1}{f(x)+1}\\ &= \frac{1}{\frac{x+1}{x}+1}\\ &= \frac{1}{\frac{x+1+x}{x}}\\ &= \frac{x}{2x+1}\end{aligned}$$