Exercice| [2639] | 1| Compositions de fonctions

Soient $f : \left| \begin{array}{ccc}]-\infty;3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2+\sqrt{3-x} \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^2+4x-1 \end{array} \right.$.

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Pistes de réflexion

On rappelle que :

- $f \circ g$ est la fonction définie par $f \circ g : x \longmapsto f(g(x))$
- $g \circ f$ est la fonction définie par $g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$

Éléments de correction

Expression algébrique de $f \circ g$: par définition $f \circ g$ est définie par $f \circ g : x \longmapsto f(g(x))$.

La fonction g étant une fonction polynôme de degré 2 dont le coefficient du terme de degré 2 est égal à $-1 < 0$, qui s'annule en $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$, on en déduit que ses variations sont :

x	2	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
Variations de g	3 ↘	0 ↘	$-\infty$

Ainsi, on a clairement que $g([2;+\infty[) \subset]-\infty;3]$, c'est à dire $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$, ce qui assure que l'expression algébrique définissant $f \circ g$ est définie sur $\mathcal{D}_g$. En conclusion le domaine de définition $\mathcal{D}_{f\circ g}$ est $\mathcal{D}_{f\circ g} = [2;+\infty[$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}_{f\circ g},\ f \circ g(x) &= 2+\sqrt{3-(-x^2+4x-1)} \\ &= 2+\sqrt{3+x^2-4x+1} \\ &= 2+\sqrt{x^2-4x+4} \\ &= 2+\sqrt{(x-2)^2} \\ &= 2+|x-2| \\ &\underset{\substack{x\in[2;+\infty[\\ \textbf{donc } |x-2|=x-2}}{=} 2+x-2 \\ &= x \end{aligned}$$

Expression algébrique de $g \circ f$: par définition $g \circ f$ est définie par $g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$.

On a clairement que : $\forall x \in]-\infty;3],\ \sqrt{3-x} \geq 0$

Par suite, il est immédiat que : $\forall x \in]-\infty;3],\ 2+\sqrt{3-x} \geq 2$

Par conséquent, on en déduit que : $\forall x \in]-\infty;3],\ f(x) \in [2;+\infty[$.

Ainsi, on a $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ ce qui assure que l'expression algébrique définissant $g \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}_f$. En conclusion le domaine de définition $\mathcal{D}_{g\circ f}$ est $\mathcal{D}_{g\circ f} =]-\infty;3]$.

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}_{g\circ f},\ g \circ f(x) &= -\left(2+\sqrt{3-x}\right)^2+4\left(2+\sqrt{3-x}\right)-1 \\ &= -\left(4+4\sqrt{x-3}+(3-x)\right)+8+4\sqrt{x-3}-1 \\ &= -\left(7-x+4\sqrt{x-3}\right)+4\sqrt{x-3}+7 \\ &= -7+x-4\sqrt{x-3}+4\sqrt{x-3}+7 \\ &= x \end{aligned}$$