Exercice| [2638] | 1| Composition de fonctions

On considère $f : x \longmapsto x^2 + 1$ et $g = \ln$. Expliciter la fonction $g \circ f$ et la fonction $f \circ g$, puis en déterminer pour chacune le domaine de définition.

Pistes de réflexion

On rappelle que :
- $f \circ g$ est la fonction définie par $f \circ g : x \longmapsto f(g(x))$
- $g \circ f$ est la fonction définie par $g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$

Éléments de correction

On commence par remarquer que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g =]0; +\infty[$.

Expression algébrique de $f \circ g$: par définition $f \circ g$ est définie par $f \circ g : x \longmapsto f(g(x))$.

Il est immédiat que : $\forall x \in]0; \infty[\,,\ \ln(x) \in \mathbb{R}$.

Par suite, on en déduit que : $\forall x \in \mathcal{D}_g,\ g(x) \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, $f(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$, ce qui assure que la fonction $f \circ g$ est définie sur $\mathcal{D}_g$, et que le domaine de définition $\mathcal{D}_{f \circ g}$ de la fonction $f \circ g$ est $\mathcal{D}_{f \circ g} =]0; +\infty[$.

Il vient alors :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{f \circ g},\ f \circ g(x) = (\ln(x))^2 + 1$$

Expression algébrique de $g \circ f$: par définition $g \circ f$ est définie par $g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$.

Il est immédiat que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$.

Par suite, on en déduit que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in]0; +\infty[$.

Par conséquent, $f\left(\mathcal{D}_f\right) \subset \mathcal{D}_g$, ce qui assure que la fonction $g \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}_f$, et que le domaine de définition $\mathcal{D}_{g \circ f}$ de la fonction $g \circ f$ est $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Il vient alors que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{g \circ f},\ g \circ f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$$