Exercice| [2550] | 1| Calculs de limites avec croissances comparées

Compléter les éléments ci-dessous pour déterminer les limites des fonctions f ci-dessous aux points considérés.

$f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-1}{x}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite	Conclusion
	$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \left(x^2-x+1\right) e^{x}$ | Limite en $-\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite	Conclusion
	$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \dfrac{x-e^{x}}{x^2+x+1}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite	Conclusion
	$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{3x^2-1}{2x^2+1}\right)$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite	Conclusion
	$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{x+1}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite	Conclusion
	$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$ | Limite en 0

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite	Conclusion
	$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

Pistes de réflexion

Pour chacune des limites à calculer :

- On identifiera le terme prépondérant qui est donné par les formules de croissances comparées
- On factorisera par ce dernier
- On procèdera ensuite au calcul de la limite correspondant

Éléments de correction

$f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-1}{x}$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^{x}}{x}\left(1-e^{-x}\right)$

Comme $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme $1-e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par croissances comparées, $\dfrac{e^{x}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par produit $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$f : x \longmapsto (x^2 - x + 1)\,\mathrm{e}^{x}$ | Limite en $-\infty$

On a clairement que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x}$

Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme $1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par croissances comparées, $x^2\mathrm{e}^{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par produit, il vient que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

$f : x \longmapsto \dfrac{x - \mathrm{e}^{x}}{x^2 + x + 1}$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^2} \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$

Comme $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme il vient que $\mathrm{e}^{-x} + 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$.

Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme il vient que $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, par quotient $\dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

Par croissances comparées, on a $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par produit, il vient que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

$f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1}\right)$ | Limite en $+\infty$

La limite en $+\infty$ du quotient de fonctions polynômes $\dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ est exactement celle du quotient de ses monômes de plus haut degré $\dfrac{3x^2}{2x^2} = \dfrac{3}{2}$.

Par suite, $\dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}$.

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{3}{2} \\ \ln(X) & \underset{X\to\frac{3}{2}}{\longrightarrow} & \underbrace{\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}_{=\ln(3)-\ln(2)} \end{array}\right\}\ \text{donc par composition } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(3) - \ln(2).$$

$f : x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{x + 1}$ | Limite en $+\infty$

On a clairement : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 + \dfrac{1}{x}}$

Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme $1 + \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Comme $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par quotient, il vient que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$f : x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{x - 1}$ | Limite en 0

Par croissances comparées $x\ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.

Il est clair que $x - 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} -1$, donc par quotient, $\dfrac{x\ln(x)}{x - 1} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.