Exercice| [2549] | 1| Calculs de limites avec croissances comparées

Compléter les éléments ci-dessous pour déterminer les limites des fonctions f ci-dessous aux points considérés.

$f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x} + 2}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x \to \dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x} + 2}$ | Limite en $-\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x \to \dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 2}{3\mathrm{e}^{-x} + 1}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x \to \dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 2}{3\mathrm{e}^{-x} + 1}$ | Limite en $-\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x \to \dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto x^2 + 1 - 2\ln(x)$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x \to \dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto x^2 + 1 - 2\ln(x)$ | Limite en 0

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x \to \dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto (x - 2)\mathrm{e}^{-x}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x \to \dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto (x - 2)\mathrm{e}^{-x}$ | Limite en $-\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x \to \dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto (1 - x)\mathrm{e}^{x} + (x - 2)\mathrm{e}^{-x}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x \to \dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto (1-x)e^{x} + (x-2)e^{-x}$ | Limite en $-\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite	Conclusion
	$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

Pistes de réflexion

Pour chacune des limites à calculer :

- On identifiera le terme prépondérant qui est donné par les formules de croissances comparées
- On factorisera par ce dernier
- On procèdera ensuite au calcul de la limite correspondant

Éléments de correction

$f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+2}$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^{x}\left(1-\dfrac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\dfrac{2}{e^{x}}\right)} = \dfrac{1-e^{-x}}{2+e^{-x}}$

Comme $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme il vient que $1-e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $2+e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

$$\left.\begin{array}{lcc} 1-e^{-x} & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & 1 \\ 2+e^{-x} & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & 2 \end{array}\right\} \text{donc par quotient } f(x) = \frac{e^{x}+1}{e^{x}+2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

$f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+2}$ | Limite en $-\infty$

Comme $e^{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme il vient que $e^{x}-1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$ et $e^{x}+2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2$.

$$\left.\begin{array}{lcc} e^{x}-1 & \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} & -1 \\ e^{x}+2 & \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} & 2 \end{array}\right\} \text{donc par quotient } f(x) = \frac{e^{x}+1}{e^{x}+2} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

$f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}-2}{3e^{-x}+1}$ | Limite en $+\infty$

Comme $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme il vient que $e^{-x}-2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -2$ et $3e^{-x}+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\left.\begin{array}{lcc} e^{-x}-2 & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & -2 \\ 3e^{-x}+1 & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & 1 \end{array}\right\} \text{donc par quotient } f(x) = \frac{e^{-x}-2}{3e^{-x}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -2$$

$f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}-2}{3e^{-x}+1}$ | Limite en $-\infty$

Il est immédiat que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^{-x}\left(1-\dfrac{2}{e^{-x}}\right)}{e^{-x}\left(3+\dfrac{1}{e^{-x}}\right)} = \dfrac{1-2e^{x}}{3+e^{x}}$

Comme $e^{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme on a que $1-2e^{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$ et $3+e^{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 3$.

$$\left.\begin{array}{lcc} 1-2e^{x} & \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} & 1 \\ 3+e^{x} & \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} & 3 \end{array}\right\} \text{donc par quotient } f(x) = \frac{e^{-x}-2}{3e^{-x}+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

$f : x \longmapsto x^2+1-2\ln(x)$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x > 0,\ f(x) = x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}-2\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$

On sait que $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et par croissances comparées que $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, par somme $1+\dfrac{1}{x^2}-2\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\left.\begin{array}{lcc} x^2 & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \\ 1+\frac{1}{x^2}-2\frac{\ln(x)}{x^2} & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & 1 \end{array}\right\} \text{donc par produit } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$f : x \longmapsto x^2+1-2\ln(x)$ | Limite en 0

Il est clair que $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc par somme $x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Comme $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, par produit, il vient que $-2\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, et finalement par somme que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

$f : x \longmapsto (x-2)e^{-x}$ | Limite en $+\infty$

Il est clair que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)e^{-x}$

Comme $\dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par simme $1 - \dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par croissances comparées, $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par produit $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$f : x \longmapsto (x-2)e^{-x}$ | Limite en $-\infty$

Il est clair que $x-2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, et que $e^{-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi, par produit $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

$f : x \longmapsto (1-x)e^{x} + (x-2)e^{-x}$ | Limite en $+\infty$

Il est clair que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-2)e^{-x} = x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)e^{-x}$

Comme $\dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme $1 - \dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par croissances comparées, $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par produit $(x-2)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par ailleurs, $1-x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $e^{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par produit $(1-x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Ainsi, par somme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

$f : x \longmapsto (1-x)e^{x} + (x-2)e^{-x}$ | Limite en $-\infty$

Il est clair que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x}\left((1-x)e^{2x} + x - 2\right)$
Par ailleurs : $\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x)e^{2x} = x\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)e^{2x}$

Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme $\dfrac{1}{x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.
On remarque que $xe^{2x} = \dfrac{1}{2} \times 2xe^{2x}$.
Comme $2x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et comme par croissances comparées $Xe^{X} \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $xe^{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi ; on en déduit par produit que $(1-x)e^{2x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.
Comme $x-2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, par somme, on en déduit que $(1-x)e^{2x}+x-2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Finalement, comme $e^{-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par produit on en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.