Exercice| [2544] | 1| Composition et calculs de limites

Compléter les éléments ci-dessous pour déterminer les limites des fonctions f ci-dessous aux points considérés.

$f : x \longmapsto \ln(-2x+1)$ | Limite en $-\infty$

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \ln(-2x+1)$ | Limite en $\frac{1}{2}$

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ | Limite en $+\infty$

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ | Limite en 1

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ | Limite en 0

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ | Limite en $+\infty$

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ | Limite en $+\infty$

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ | Limite en 0

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{2x+1}{x-1}}$ | Limite en 1

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\dots}{\longrightarrow} \dots$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{2x+1}{x-1}}$ | Limite en $+\infty$

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2+\frac{1}{x}}$ | Limite en 0

« Décomposition » de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

Pistes de réflexion

Pour chacune des limites à calculer :

- On identifiera la composition de fonctions mise en jeu
- On procèdera ensuite au calcul de la limite correspondant en levant les différentes indéterminées

Éléments de correction

$f : x \longmapsto \ln(-2x+1)$ | Limite en $-\infty$

$$\left.\begin{array}{lcl} -2x+1 & \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} & +\infty \\ \ln(X) & \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \end{array}\right\}$$ donc par composition, $f(x) = \ln(-2x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$f : x \longmapsto \ln(-2x+1)$ | Limite en $\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{lcl} -2x+1 & \underset{x\to\frac{1}{2}}{\longrightarrow} & 0 \\ \ln(X) & \underset{X\to 0}{\longrightarrow} & -\infty \end{array}\right\}$$ donc par composition, $f(x) = \ln(-2x+1) \underset{x\to\frac{1}{2}}{\longrightarrow} -\infty$

$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ | Limite en $+\infty$

La limite du quotient de polynôme $\frac{2x+1}{x-1}$ est exactement celle du quotient de son monôme de plus haut degré $\frac{2x}{x} = 2$.

$$\left.\begin{array}{lcl} \frac{2x+1}{x-1} & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & 2 \\ \ln(X) & \underset{X\to 2}{\longrightarrow} & \ln(2) \end{array}\right\}$$ donc par composition $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ | Limite en 1

Il est immédiat que l'on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

et donc on ne peut chercher la limite qu'en 1 par valeur supérieure à 1.

$$\left.\begin{array}{lcl} 2x+1 & \underset{x\to 1}{\longrightarrow} & 3 \\ x-1 & \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} & 0 \text{ avec } x-1>0 \end{array}\right\}$$ donc par quotient $\frac{2x+1}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$

Il vient donc que : $$\left.\begin{array}{lcl} \frac{2x+1}{x-1} & \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} & +\infty \\ \ln(X) & \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \end{array}\right\}$$ donc par composition, $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$

$f : x \longmapsto \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ | Limite en 0

Il est immédiat que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$
Par suite :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

et donc on ne peut chercher la limite qu'en 0 par valeur supérieure à 0.
Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, par somme $1+\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

$$\left.\begin{array}{lll} 1+\frac{1}{x} & \xrightarrow[x\to 0^+]{} & +\infty \\ \sqrt{X} & \xrightarrow[X\to+\infty]{} & +\infty \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

$f : x \longmapsto \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ | Limite en $+\infty$

Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, par somme $1+\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

$$\left.\begin{array}{lll} 1+\frac{1}{x} & \xrightarrow[x\to+\infty]{} & 1 \\ \sqrt{X} & \xrightarrow[X\to 1]{} & \underbrace{\sqrt{1}}_{=1} \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ | Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{x} & \xrightarrow[x\to+\infty]{} & 0 \\ \mathrm{e}^{X} & \xrightarrow[X\to 0]{} & \underbrace{\mathrm{e}^{0}}_{=1} \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ | Limite en 0

Le comportement de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ au voisinage de 0 demande une étude de la limite de f en 0 à gauche et à droite.

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{x} & \xrightarrow[x\to 0^+]{} & +\infty \\ \mathrm{e}^{X} & \xrightarrow[X\to+\infty]{} & +\infty \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{x} & \xrightarrow[x\to 0^-]{} & -\infty \\ \mathrm{e}^{X} & \xrightarrow[X\to-\infty]{} & 0 \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{2x+1}{x-1}}$ | Limite en 1

Il est immédiat que l'on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Le changement de signe en 1 de la fonction $x \longmapsto \frac{2x+1}{x-1}$ demande donc une étude de la limite de f en 1 à gauche et à droite.

$$\left.\begin{array}{lll} 2x+1 & \xrightarrow[x\to 1]{} & 3 \\ x-1 & \xrightarrow[x\to 1^+]{} & 0 \text{ avec } x-1>0 \end{array}\right\} \text{donc par quotient } \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{2x+1}{x-1} & \xrightarrow[x\to 1^+]{} & +\infty \\ \mathrm{e}^{X} & \xrightarrow[X\to+\infty]{} & +\infty \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x+1}{x-1}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$$

$$\left.\begin{array}{lll} 2x+1 & \xrightarrow[x\to 1]{} & 3 \\ x-1 & \xrightarrow[x\to 1^-]{} & 0 \text{ avec } x-1<0 \end{array}\right\} \text{donc par quotient } \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{2x+1}{x-1} & \xrightarrow[x\to 1^-]{} & -\infty \\ \mathrm{e}^{X} & \xrightarrow[X\to-\infty]{} & 0 \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x+1}{x-1}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{2x+1}{x-1}}$ | Limite en $+\infty$

La limite du quotient de polynôme $\dfrac{2x+1}{x-1}$ est exactement celle du quotient de son monôme de plus haut degré $\dfrac{2x}{x} = 2$.

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{2x+1}{x-1} & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & 2 \\ \mathrm{e}^{X} & \underset{X\to 2}{\longrightarrow} & \mathrm{e}^{2} \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x+1}{x-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{2}$$

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2+\frac{1}{x}}$ | Limite en 0

Le comportement de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0 demande une étude de la limite de f en 0 à gauche et à droite.
Il est clair que $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, par somme il vient que $-x^2 + \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\left.\begin{array}{ccc} -x^2 + \dfrac{1}{x} & \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} & +\infty \\ \mathrm{e}^{X} & \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$, par somme il vient que $-x^2 + \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$.

$$\left.\begin{array}{ccc} -x^2 + \dfrac{1}{x} & \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} & -\infty \\ \mathrm{e}^{X} & \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} & 0 \end{array}\right\} \text{donc par composition } f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0.$$