Exercice| [2502] | 1| Changement d'indice

Dans chacune des sommes suivantes, effectuez un changement d'indice, puis les calculer.

(1). $S_1 = \sum_{k=3}^{12} (k-2)$;

(2). $S_2 = \sum_{k=1}^{9} (k+3)$;

(3). $S_3 = \sum_{k=3}^{9} \frac{1}{2^{k+2}}$;

(4). $S_4 = \sum_{k=2}^{8} 10^{k-2}$.

Pistes de réflexion

— On procédera au changement d'indice dans l'idée de modifier le terme général de la somme de sorte à le transformer en celui d'une somme de référence.
— On gérera ensuite si nécessaire la plage d'indexation afin de pouvoir appliquer les formules de sommes usuelles.

Éléments de correction

(1). On effectue le changement d'indice :

Relation entre les indices :	$i = k-2$			
Transformation des bornes :	quand	$k=3$	on a :	$i=1$
	quand	$k=12$	on a :	$i=10$

pour obtenir :
$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=3}^{12} (k-2) \\ &= \sum_{i=1}^{10} i \\ &= \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 55 \end{aligned}$$

(2). On effectue le changement d'indice :

Relation entre les indices :	$i = k+3$			
Transformation des bornes :	quand	$k=1$	on a :	$i=4$
	quand	$k=9$	on a :	$i=12$

pour obtenir :
$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{9} (k+3) \\ &= \sum_{i=4}^{12} i \\ &= \sum_{i=1}^{12} i - \sum_{i=1}^{3} i \\ &= \frac{12 \times 13}{2} - \frac{3 \times 4}{2} \\ &= 78 - 6 \\ &= 72 \end{aligned}$$

(3). On effectue le changement d'indice :

Relation entre les indices :	$i = k+2$			
Transformation des bornes :	quand	$k=3$	on a :	$i=5$
	quand	$k=9$	on a :	$i=11$

pour obtenir :
$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=3}^{9} \frac{1}{2^{k+2}} \\ &= \sum_{i=5}^{11} \frac{1}{2^i} \\ &= \sum_{i=5}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11+1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{4+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{2^{12}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1-\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{2^{12}}\right) - 2\left(1-\frac{1}{2^5}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{2^{11}} - 2 + \frac{1}{2^4} \\ &= -\frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^4} \\ &= -\frac{1}{2^{11}} + \frac{2^7}{2^{11}} \\ &= \frac{2^7-1}{2^{11}} \\ &= \frac{128-1}{2^{11}} \\ &= \frac{127}{2048} \end{aligned}$$

(4). On effectue le changement d'indice :

Relation entre les indices :	$i = k-2$			
Transformation des bornes :	quand	$k=2$	on a :	$i=0$
	quand	$k=8$	on a :	$i=6$

pour obtenir :

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=2}^{8} 10^{k-2} \\ &= \sum_{i=0}^{6} 10^{i} \\ &= \frac{1-10^{6+1}}{1-10} \\ &= \frac{1-10^{7}}{-9} \\ &= \frac{1}{9}\left(10^7-1\right) \\ &= \frac{1}{9} \times 9\,999\,999 \\ &= 1\,111\,111 \end{aligned}$$