Exercice| [2498] | 1| Opérations sur les sommes

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer $\displaystyle S_1 = \sum_{k=10}^{78} (3k+5)$ et $\displaystyle S_2 = \sum_{k=1}^{15} k\,(k+1)$.

Pistes de réflexion

- On utilisera tout particulièrement la linéarité du symbole $\sum$ pour se ramener à des sommes usuelles.
- On n'oubliera pas de gérer la plage d'indexation si nécessaire pour appliquer les formules connues.

Éléments de correction

On a directement que :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=10}^{78} (3k+5)\\
&= 3\sum_{k=10}^{78} k + \sum_{k=3}^{78} 5\\
&= 3\left[\sum_{k=1}^{78} k - \sum_{k=1}^{9} k\right] + 5 \times \underbrace{(78-3+1)}_{\text{Nombre de termes de la somme}}\\
&= 3\left[\frac{78\times 79}{2} - \frac{9\times 10}{2}\right] + 5\times 76\\
&= 3\left[\frac{6162}{2} - \frac{90}{2}\right] + 380\\
&= 3\times\frac{6072}{2} + 380\\
&= 3\times 3036 + 380\\
&= 9108 + 380\\
&= 9488
\end{aligned}$$

puis sur le même principe :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=1}^{1} 5k\,(k+1)\\
&= \sum_{k=1}^{15} \left(k^2 + k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{15} k^2 + \sum_{k=1}^{15} k\\
&= \frac{15\times 16\times 31}{6} + \frac{15\times 16}{2}\\
&= \frac{7440}{6} + \frac{240}{2}\\
&= 1240 + 120\\
&= 1480
\end{aligned}$$