Exercice| [2397] | 1| Caractère libre et générateur d'une famille de $\mathbb{R}^n$

On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :

$$e_1 = (1,1,1,1), \quad e_2 = (0,1,2,1), \quad e_3 = (1,0,-2,3) \text{ et } e_4 = (1,1,2,-2).$$

(1). La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

(2). Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1,1,\alpha,\beta)$ appartienne à $\mathrm{Vect}\ (\mathcal{F})$.

Pistes de réflexion

(1). On écrit la matrice de la famille de vecteurs, puis on procède à un échelonnement pour en déterminer le nombre de pivots en donnant bien évidemment les arguments pour justifier que c'est cela qu'il faut faire.

(2). On traduit cette relation à l'aide d'un système en se souvenant de ce qu'est par <u>définition</u> $\mathrm{Vect}\ (F)$, dont il faut discuter de la compatibilité.

Éléments de correction

(1). La famille $\mathcal{F}$ est libre (resp. génératrice) si, et seulement si, le rang du système homogène de matrice la matrice de la famille de vecteurs est de rang 4 (resp. 4) puisque possédant 4 vecteurs (resp. puisqu'étant une famille de $\mathbb{R}^4$).

La matrice associée à cette famille de vecteurs est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

dont un échelonnement en lignes donne que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}}{\sim_L}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls, ainsi, la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre ni génératrice.

(2). On cherche donc à déterminer une condition sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ tels que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$.

Il s'agit donc de savoir si le système de matrice A et de second membre la matrice colonne formée par les coordonnées de u est compatible. En reprenant l'échelonnement de la matrice A sur la matrice augmentée de ce nouveau système, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 3 & -2 & \beta \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & \beta - 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \beta - 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta + 3\alpha - 4 \end{array}\right)$$

Ce système présente alors une équation de compatibilité qui est $\beta + 3\alpha - 4 = 0$ qui est donc la condition nécessaire et suffisante recherchée.