Exercice| [2396] | 1| Étudier la liberté d'une famille dépendant d'un paramètre

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où :

$$u_1 = (1, a, 3)\ , \quad u_2 = (1, 1, a) \qquad \text{et} \qquad u_3 = (a, 1, 3)$$

où a étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F}$ et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

Pistes de réflexion

- On écrit la matrice A de cette famille de vecteurs.
- On procède à un échelonnement de la matrice jusqu'à rencontrer des opérations qui sont conditionnées par la valeur de a, ou si ce n'est pas le cas, d'avoir A équivalente en ligne à une matrice triangulaire supérieure dont les pivots dépendent de a.
- On discute alors du nombre de pivots en fonction de a.
- Puis on étudie les cas exclus par les valeurs de a pour la liberté de la famille $\mathcal{F}$.

Éléments de correction

Puisque $\mathcal{F}$ est une famille de $\boxed{3}$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F}$ sera libre si, et seulement si, le système homogène de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 3 & a & 3 \end{pmatrix}$ est de rang $\boxed{3}$. On procède alors à l'échelonnement de la matrice A pour en détérminer les pivots et le rang, étant inutile d'écrire le second membre puisque ce dernier est nul pour chacune des équations.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 3 & a & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-3 & 3-3a \end{pmatrix}$$

On a ainsi deux cas :

Si $a \neq 1$ **:** on peut poursuivre l'échelonnement :

$$A \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a-3}{1-a} L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, les deux premiers pivots 1 et $1-a$ sont clairement non nuls.
Le troisième pivot s'annule pour $a = 2$ ou $a = -3$.
On en déduit donc que si $a \notin \{-3, 1, 2\}$, la matrice A est de rang 3, et par suite la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Si $a = 1$ **:** la matrice A est dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elle ne possède donc que 2 pivots, et est donc de rang 2. La famille $\mathcal{F}$ est dans ce cas liée.

Il reste à chercher les relations de dépendances entre les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ pour les cas où $a = 1$, $a = 2$ et $a = 3$.

Pour trouver de telles relations, il s'agit donc de déterminer, dans chacun des cas, trois réels α, β γ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \overrightarrow{0}$. Cette relation se traduit par la résolution du système homogène de matrice A, dont les échelonnements précédents donnent :

Si $a = 1$ **:** on obtient que $A \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne les relations $\begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 0 \end{cases}$. Il vient donc que $u_1 = u_3$, ce que l'on voyait en fait directement.

Si $a = 2$ **:** on obtient que $A \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui permet d'obtenir les relations $\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -3\gamma \end{cases}$.

Par suite on en déduit que $u_1 - 3u_2 + u_3 = \overrightarrow{0}$.

Si $a = -3$ **:** on obtient que $A \underset{L_2 \frac{1}{2} L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui permet d'écrire les relations $\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases}$.

Par suite, on en déduit que $u_1 + 2u_2 + u_3 = \overrightarrow{0}$.