Exercice| [2383] | 1| Une recherche d'équivalent

Donner un équivalent simple du terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\left(\mathrm{e}^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}-1\right)\left(1-\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)\right).$$

Pistes de réflexion

— Décomposer chaque terme de sorte à faire apparaître des équivalents usuels est le seul conseil que je peux vous donner. . .

Éléments de correction

— Puisque $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il vient $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ et par conséquent $\mathrm{e}^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}-1\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1$.

De plus puisque $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il vient $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}$ et par transisitivé $\mathrm{e}^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}-1\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$.

— Puisque $\frac{1}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il vient $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc $1-\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^2}{2}$.

Or puisque $\frac{1}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il vient $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$.

Ainsi par transitivité, $1-\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}{2}$ et donc $1-\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^4}$.

— Finalement par produit d'équivalents $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}\times\frac{1}{2n^2}$ c'est à dire $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4n^5}$.