Exercice| [2382] | 1| Suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par :

$$u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2, \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5}$$

(1). On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = v_n - u_n.$

(a). Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.

(b). En déduire une expression de w_n en fonction de n.

(c). Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier votre réponse.

(2). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}w_n$.

En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3). Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(4). Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

(5). Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad t_n = u_n + v_n$ est constante. En déduire la valeur de ℓ.

Pistes de réflexion

(1). (a). Montrer qu'une suite est géométrique.

(b). Donner le terme général d'une suite géométrique en fonction de n.

(c). Déterminer la limite d'une suite géométrique.

(2). Interpréter en terme de variation la différence $u_{n+1} - u_n$.

(3). Déterminer le sens de variation d'une suite.

(4). Montrer que deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite.

(5). Exploiter une égalité pour en déduire la valeur d'une limite.

Éléments de correction

(1). (a). On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{v_n - u_n}{5} = \frac{1}{5}w_n$$

Ainsi, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0$ c'est à dire $w_0 = 1$.

(b). On en déduit donc directement que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n.$

(c). Puisque la raison $-\frac{1}{2}$ de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on en déduit que la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ est 0.

(2). On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \frac{2}{5}(v_n - u_n) = \frac{2}{5}w_n$$

Puisque la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5} > 0$ et de premier terme $w_0 > 0$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi croissante.

(3). On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - v_n = \frac{2}{5}(u_n - v_n) = \frac{2}{5}w_n$$

Par les mêmes arguments qu'à la question précédente, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

(4). Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, les deux suites sont adjacentes. Par théorème, elles convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

(5). On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} + \frac{2u_n + 3v_n}{5} = \frac{5u_n + 5v_n}{5} = u_n + v_n = t_n$$

Ainsi, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à son premier terme qui vaut $t_0 = v_0 + u_0$ c'est à dire $t_0 = 3$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3$. Par passage à la limite, il vient que $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ell$. Par suite, par unicité de la limite, on en déduit que $\ell = \frac{3}{2}$.