Exercice| [2369] | 1| Schéma de Hörner

On se propose dans cet exercice d'expliciter les **schémas de Hörner** pour les calculs de valeurs ou sa factorisation d'un polynôme de degré 3. Dans tout ce qui suit :

— P est le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ où $(\alpha_0, \dots, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$.

— a est un réel quelconque fixé.

(1). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ((\alpha_3 x + \alpha_2) x + \alpha_1) x + \alpha_0$.
Cette transformation d'écriture s'appelle le **schéma de Hörner** du polynôme P.

(2). Soit A le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5$.
Donner le **schéma de Hörner** de ce polynôme A.

(3). On pose : $\left\{\begin{array}{l} h_3 = \alpha_3 \\ h_2 = \alpha_2 + a \times h_3 \\ h_1 = \alpha_1 + a \times h_2 \\ h_0 = \alpha_0 + a \times h_1 \end{array}\right.$.

(a). Montrer que $P(a) = h_0$.

(b). Qu'en déduit-on si $h_0 = 0$ pour le polynôme P ?

(c). Expliciter pour le polynôme A précédent les valeurs de h_3, h_2, h_1 et h_0 lorsque $a = 5$ puis en déduire la valeur de $A(5)$ par cette méthode.

(4). Dans cette question, on cherche le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a)$.

(a). On considère le polynôme G défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $G(x) = P(x) - P(a)$.
Justifier que G est factorisable par $(x - a)$.

(b). En déduire alors que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = h_3 x^2 + h_2 x + h_1$

(c). Expliciter alors le polynôme Q pour le polynôme A de la question précédente.

(5). Le calcul des coefficients h_3, h_2, h_1 et h_0 peut s'illustrer avec le processus algorithmique suivant :

α_3	$\alpha_2 + a \times \boxed{\alpha_3}$	$\alpha_1 + a \times \boxed{h_2}$	$\alpha_0 + a \times \boxed{h_1}$
$\boxed{\alpha_3}$	$\boxed{h_2}$	$\boxed{h_1}$	h_0

L'utiliser pour factoriser les deux polynômes suivants :

(a). pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = 5x^3 - 11x^2 - 3x - 27$ sachant que 3 est racine de P_1 ;

(b). pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$ sachant que 5 est racine de P_2.

Le schéma de Hörner et ces deux applications s'étendent à des polynômes de degré quelconque.

Pistes de réflexion

(1). Développer l'expression proposée et s'apercevoir que l'on obtient bien celle de P initialement donnée.

(2). Transposer simplement la factorisation précédente au polynôme A proposé.

(3).(a). Expliciter $P(a)$ à partir du schéma de Hörner de P en faisant apparaître sucessivement h_3, h_2, h_1 puis h_0.

(b). Comment traduit-on l'information $P(a) = 0$?

(c). Déterminer les valeurs de h_3, h_2, h_1 et h_0 avec les relations proposées pour les valeurs numériques des coefficients du polynôme A et la valeur de a données.

(4).(a). Quel est le lien entre une possible factorisation de $G(x)$ par $(x-a)$ et ce que représente alors a pour G ?

(b). C'est une simple réécriture du schéma de Hörner.

(c). Le faire ensuite pour le polynôme A.

(5).(a). Reproduire le schéma proposé avec les valeurs numériques associées au polynôme P_1 proposé et faire les calculs.

(b). Reproduire le schéma proposé avec les valeurs numériques associées au polynôme P_2 proposé et faire les calculs.

Éléments de correction

(1). Il suffit de développer l'expression proposée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ((\alpha_3 x + \alpha_2) x + \alpha_1) x + \alpha_0 = (\alpha_3 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_1) x + \alpha_0 = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = P(x)$$

(2). On reprend directement le résultat de la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = ((2x - 7) x + 4) x - 5$

(3).(a). En utilisant le schéma de Hörner de P, il vient :

$$P(a) = ((\alpha_3 a + \alpha_2) a + \alpha_1) a + \alpha_0 \underset{\text{car } h_2 = \alpha_2 + a h_3}{=} (h_2 \times a + \alpha_1) a + \alpha_0 \underset{\text{car } h_1 = \alpha_1 + a h_2}{=} h_1 \times a + \alpha_0 \underset{\text{car } h_0 = \alpha_0 + a h_1}{=} h_0$$

(b). Si $h_0 = 0$, alors $P(a) = 0$ et donc a est une racine de P, qui sera ainsi factorisable par $x - a$.

(c). En appliquant directement ces relations, il vient pour le polynôme A :

$$\left\{\begin{array}{l} h_3 = 2 \\ h_2 = -7 + 5 \times 2 \text{ d'où } h_2 = 3 \\ h_1 = 4 + 5 \times 3 \text{ d'où } h_1 = 19 \\ h_0 = -5 + 5 \times 19 \text{ d'où } h_0 = 90 \end{array}\right.$$

(4).(a). On a clairement que $G(a) = P(a) - P(a)$ c'est à dire $G(a) = 0$, donc a est une racine de G et par suite G est factorisable par $x - a$.

(b). En utilisant le schéma de Hörner de P, il vient que :

$$\begin{aligned} P(x) - P(a) &= ((h_3 x + (h_2 - a h_3)) x + (h_1 - a h_2)) x + h_0 - a h_1 - h_0 \\ &= ((h_3 (x - a) + h_2) x + h_1 - a h_2) x - a h_1 \\ &= (h_3 (x - a) x + h_2 (x - a) + h_1) x - a h_1 \\ &= h_3 x^2 (x - a) + h_2 x (x - a) + h_1 (x - a) \\ &= (x - a) \left(h_3 x^2 + h_2 x + h_1\right) \end{aligned}$$

et on en déduit ainsi l'expression de Q.

(c). On en déduit ainsi que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $A(x) = (x - 5) \left(2x^2 + 3x + 19\right) + 90$

(5).(a). On applique le schéma de Hörner avec $a = 3$;

5	$-11 + 3 \times \boxed{5}$	$-3 + 3 \times \boxed{4}$	$-27 + 3 \times \boxed{9}$
$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	0

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = (x - 3) \left(5x^2 + 4x + 9\right)$ et comme le discriminant du polynôme $x \longmapsto 5x^2 + 4x + 9$ est strictement négatif, on a la factorisation de P sur $\mathbb{R}$.

(b). On applique le schéma de Hörner avec $a = 5$;

-1	$-1+5\times(-1)$	$16+5\times(-4)$	$20+5\times(-4)$
-1	-4	-4	0

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = (x-3)\,(-x-2x-4)$ et comme on remarque que $x^2+2x+4 = (x+2)^2$, on en déduit que $P_2(x) = -(x-3)(x+2)^2$.