Exercice| [2363] | 1| Factorisation de polynômes

Soit P la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -10x^3 - 23x^2 + 65x - 12$.

(1). Vérifier que -4 est racine de P.

(2). Justifier alors l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+4)\left(ax^2 + bx + c\right)$, puis les déterminer.

(3). Déduire des questions précédentes :

(a). La résolution de l'équation $P(x) = 0$;

(b). Une factorisation de $P(x)$ sous forme d'un produit de 3 fonctions affines ;

(c). La résolution de l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Pistes de réflexion

(1). Calculer $P(-4)$.

(2). Procéder à une identification pour déterminer les différents coefficients a, b et c.

(3). (a). C'est une équation produit...

(b). Il reste une partie à factoriser...

(c). C'est une étude de signe à faire.

Éléments de correction

(1). On vérifie que $P(-4) = 0$, ce qui est le cas, puisque $P(-4) = -10 \times (-4)^3 - 23 \times (-4)^2 + 65 \times (-4) - 12 = -10 \times (-64) - 23 \times 16 - 260 - 12 = 640 - 368 - 272 = 0$.

(2). Le nombre -4 étant racine du polynôme P, il est donc factorisable par le polynôme $(x+4)$, c'est à dire qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+4)\left(ax^2 + bx + c\right)$.

Pour déterminer les réels a, b, et c, on procède par exemple par identification. Le développement de cette dernière expression de P donne :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^3 + (4a+b)x^2 + (4b+c)x + 4c$ que l'on identifie avec $P(x) = -10x^3 - 23x^2 + 65x - 12$

On obtient alors le système d'équation $\begin{cases} a = -10 \\ 4a + b = -23 \\ 4b + c = 65 \\ 4c = -12 \end{cases}$ dont les solutions sont $a = -10$, $c = -3$ et $b = 17$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+4)\left(-10x^2 + 17x - 3\right)$.

(3). (a). Ainsi : $P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ -10x^2 + 17x - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{1}{5} \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Les solutions de $P(x) = 0$ sont donc $\mathcal{S} = \left\{-4, \dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{2}\right\}$.

(b). Des solutions de $P(x) = 0$, on en déduit directement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+4)(5x-1)(2x-3)$.

(c). Il suffit d'étudier le signe de la fonction affine $x \longmapsto x + 4$ et du polynôme de degré 2 $x \longmapsto -10x^2 + 17x - 3$. La première est une fonction affine croissante qui s'annule en $x = -4$ et le second un polynôme de degré 2 dont le coefficient du terme de degré 2 est négatif, à discriminant positif et qui s'annule en $\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{3}{2}$. D'où le signe de $P(x)$:

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $-10x^2 + 17x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, les solutions de $P(x) \geq 0$ sont : $]-\infty; -4] \cup \left[\dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{2}\right]$.