Exercice| [2329] | 1| Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où :
$u_1 = (2, -2, 3)$, $u_2 = (-1, -1, 2)$, $u_3 = (3, -1, 2)$ et $u_4 = (-2, -2, 3)$.

(1). Sans calculs , expliquer pourquoi la famille $\mathcal{F}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

(2). Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(3). Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.
Justifier que u peut s'écrire comme combinaison linéaire des quatre vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4, puis déterminer quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 + \lambda_4.u_4 = u$.

Pistes de réflexion

(1). Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée.

(2). Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est génératrice.

(3). Écrire un vecteur comme combinaison linéaire d'autres vecteurs.

Éléments de correction

(1). La famille $\mathcal{F}$ est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Elle ne peut donc pas être libre puisque dans $\mathbb{R}^3$, toute famille d'au moins $3 + 1 = 4$ vecteurs est liée.

(2). $\mathcal{F}$ sera génératrice de $\mathbb{R}^3$ si sa matrice est de rang 3, c'est à dire si son échelonnée possède 3 pivots.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{7}{4}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Après échelonnement, on obtient 3 pivots non nuls, et ainsi, $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(3). Puisque $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$, il existe quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$. Ces réels sont solutions du système de représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{7}{4}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

On en déduit les relations : $\begin{cases} \lambda_1 = -3 - \lambda_4 \\ \lambda_2 = 2 - \lambda_4 \\ \lambda_3 = 3 + \lambda_4 \end{cases}$ où $\lambda_4 \in \mathbb{R}$

Donc en prenant $\lambda_4 = 0$, il vient ainsi $u = -3u_1 + 2u_2 + 3u_3$.