Exercice| [2287] | 1| Signe d'un quotient

On se propose dans cet exercice de déterminer le signe du quotient :

$$Q(x) = \frac{-6x^3 + 19x^2 - 19x + 6}{3x^2 - 2x - 8}$$

(1). Pour tout réel x, on pose $R(x) = 3x^2 - 2x - 8$. Résoudre l'équation $R(x) = 0$.

(2). Pour tout réel x, on pose $P(x) = -6x^3 + 19x^2 - 19x + 6$.

- **(a).** Montrer que 1 est racine de P.
- **(b).** Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$
- **(c).** Factoriser alors P sous forme d'un produit de 3 fonctions affines.
- **(d).** Résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

(3). Utilisez les questions précédentes pour construire le tableau de signe de $Q(x)$.

Pistes de réflexion

(1). Résoudre une équation de degré 2.

(2). **(a).** Vérifier qu'un nombre est racine d'un polynôme.

- **(b).** Factoriser un polynôme de degré 3.
- **(c).** Terminer la factorisation d'un polynôme de degré 3
- **(d).** Étudier le signe d'un polynôme de degré 3.

(3). Étudier le signe d'un quotient.

Éléments de correction

(1). Le discriminant du polynôme $R(x) = 3x^2 - 2x - 8$ vaut $\Delta = 100$ et a pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -\frac{4}{3}$.

(2). **(a).** On calcule $P(1)$ et on obtient $P(1) = 0$.

- **(b).** En développant l'expression proposée, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. En identifiant avec l'expression de P, on a $\begin{cases} a = -6 \\ b - a = 19 \\ c - b = -19 \\ -c = 6 \end{cases}$ d'où $a = -6$, $c = -6$ et $b = 13$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)\left(-6x^2 + 13x - 6\right)$.
- **(c).** Il reste à factoriser le polynôme $-6x^2 + 13x - 6$, ce que l'on fait en calculant ses racines qui sont $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ pour obtenir : $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) = -6(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.
- **(d).** On détermine le signe de $P(x)$ en fonction de x à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-6x^2 + 13x - 6$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

et on en déduit les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$: $\boxed{\mathrm{Sol}_{P(x)<0} = \left]\frac{2}{3}; 1\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[}$.

(3). On détermine le signe de $Q(x)$ en fonction de x à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $-6x^2 + 13x - 6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $3x^2 - 2x - 8$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$-$	
Signe de $Q(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	