Exercice| [0226] | 1| Dimension finie

Dans $\mathbb{R}^5$ rapporté à sa base canonique, on donne les vecteurs :

$$u_1 = (2,3,-3,4,2) \quad u_2 = (3,6,-2,5,9)$$

$$u_3 = (7,18,-2,7,7) \quad u_4 = (2,4,-2,3,1)$$

Étudier le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_4)$.

Pistes de réflexion

- On sait que le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_4)$ est égal au rang de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
- On pourra obtenir ce dernier par échelonnement en lignes ou par un échelonnement en colonnes.

Éléments de correction

En notant $F = (u_1, \ldots, u_4)$, par définition : $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4))$
En notant A la matrice de la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, par théorème, on a : $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{rg}(A)$.

Par construction, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 18 & 4 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Recherche du rang de A par échelonnement en lignes : un échelonnement en lignes de la matrice A donne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 18 & 4 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{17}{2} & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{2}{3}L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 4L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -30 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - \frac{15}{2}L_3}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\operatorname{rg}(A) = 3$ et par suite que le rang de la famille $\mathcal{F}$ est égal à 3.

Recherche du rang de A par échelonnement en colonnes : un échelonnement en colonnes de la matrice A donne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 18 & 4 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow 2C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow 2C_3 - 7C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 15 & 1 \\ -3 & 5 & 17 & 1 \\ 4 & -2 & -14 & -1 \\ 2 & 12 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_4 \leftrightarrow C_2}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 15 & 3 \\ -3 & 1 & 17 & 5 \\ 4 & -1 & -14 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 12 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - 15C_2 \\ C_4 \leftarrow C_3 - 3C_2}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_4 \leftarrow C_4 - C_3}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\operatorname{rg}(A) = 3$ et par suite que le rang de la famille $\mathcal{F}$ est égal à 3.