Exercice| [0222] | 1| Dimension finie

Dans $\mathbb{R}^4$, on donne : $u_1 = (2,1,3,-1)$, $u_2 = (-1,1,-3,1)$, $u_3 = (4,5,3,-1)$, et $u_4 = (1,5,-3,1)$.
Trouver une base et la dimension du sous-espace engendré par ces quatre vecteurs.

Pistes de réflexion

— On commencera par s'assurer du caractère lié de la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_4)$ de sorte à pouvoir exprimer un ou plusieurs vecteurs comme combinaison linéaire de plusieurs d'entre eux.
— Cela permettra de réduire la taille de la famille qui engendre $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_4)$.
— Il restera alors à prouver que cette sous-famille de $(u_1, \ldots, u_4)$ est une famille libre.
— Cette sous-famille étant libre et génératrice, elle formera une base du sous-espace engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_4)$, ce qui nous donnera la dimension de ce dernier.

Éléments de correction

Dans toute la suite, on notera $F = \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Étude du caractère libre de la famille $(u_1, \ldots, u_4)$ **:** supposons que l'on ait : $(\star)$: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = \overrightarrow{0}$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.
La relation $(\star)$ conduit à écrire que :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ est solution du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ que l'on résout par échelonnement en lignes :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 - 2\lambda_4 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 - 3\lambda_4 \end{cases}, \quad (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2$$

Par conséquent, on a :

$$\forall (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2,\ (-3\lambda_3 - 2\lambda_4)\, u_1 + (-2\lambda_3 - 3\lambda_4)\, u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = \overrightarrow{0}$$

On en déduit donc que la famille $(u_1, \ldots, u_4)$ est une famille liée.

Recherche de relations de dépendance : En particulier, pour $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 1$, il vient : $-2u_1 - 3u_2 + u_4 = \overrightarrow{0}$ ce qui donne que $u_4 = 2u_1 + 3u_2$.
De même, pour $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 0$, il vient : $-3u_1 - 2u_2 + u_3 = \overrightarrow{0}$ ce qui donne que $u_3 = 3u_1 + 2u_2$.

Dimension et base de $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_4)$ **:** D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \text{Vect}\,(u_1, u_2, 3u_1 + 2u_2, 2u_1 + 3u_2) \\ &= \text{Vect}\,(u_1, u_2) \end{aligned}$$

On a donc : $F = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$.
Par conséquent, la famille (u_1, u_2) est une famille génératrice de F.
Par ailleurs, les deux vecteurs u_1 et u_2 étant non nuls et non colinéaires, par théorème, ils forment une famille libre.
Par suite, (u_1, u_2) est une famille libre et génératrice de F, donc par définition, elle en forme une base.
On sait par ailleurs que la dimension de F est égale au nombre de vecteurs de l'une quelconque de ses bases.
Ainsi, on en déduit que $\dim(F) = 2$.

Autre méthode : par définition, $\dim\left(\text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)\right) = \text{rg}\,(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est la famille $(u_1, \ldots, u_4)$.
En notant $A = \text{Mat}\,(u_1, \ldots, u_4)$ la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on sait que $\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(\mathcal{F})$.

Par définition $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et un échelonnement en lignes donne que :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\text{rg}\,(A) = 2$ ce qui donne que $\text{rg}\,(\mathcal{F}) = 2$ et donc que $\dim\,(F) = 2$.
Pour obtenir une base de F, il suffit donc de trouver une famille de deux vecteurs de F qui soit libre, ou qui soit génératrice de F.
En remarquant que u_1 et u_2 sont deux vecteurs de F non nuls et non colinéaires, ils forment donc une famille de libre de F.
Par suite la famille (u_1, u_2) est une famille libre de 2 vecteurs de F qui est de dimension 2, donc par théorème, elle forme une base de F.