Exercice| [2197] | 1| Factorisation de polynômes

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[x]$ défini par :

$$P = 4x^7 - 16x^6 + 9x^5 + 15x^4 + 15x^3 - 18x^2 - 28x - 8$$

(1). Soit Q le polynôme donné par $Q = x^2 + x + 1$.

  (a). Effectuer la division euclidienne de P par Q.

  (b). Qu'en conclure ?

(2). Vérifier que 2 est racine de P, puis en déterminer son ordre de multiplicité.

(3). Terminer la factorisation de P dans $\mathbb{R}[x]$.

Pistes de réflexion

(1). (a). Effectuer ce qui est demander... sans se tromper !

  (b). Comment interprète-t-on le reste d'une division euclidienne ?

(2). Utiliser peut-être le théorème liant dérivée et ordre de multiplicité d'une racine pour aller plus vite.

(3). Aller jusqu'au bout de la factorisation en n'oubliant pas de factoriser si possible les éventuels polynômes de degré 2 qui apparaissent.

Éléments de correction

(1). (a). On pose la division de P par Q pour obtenir : $P = \left(x^2+x+1\right)\left(4x^5 - 2x0^4 + 25x^3 + 10x^2 - 20x - 8\right) + 0$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
4x^7 & -16x^6 & +9x^5 & +15x^4 & +15x^3 & -18x^2 & -28x & -8 & x^2+x+1 \\
4x^7 & +4x^6 & +4x^5 & & & & & & 4x^5-2x0^4+25x^3+10x^2-2\dots \\
 & -20x^6 & +5x^5 & +15x^4 & +15x^3 & -18x^2 & -28x & -8 & \\
 & -20x^6 & -20x^5 & -20x^4 & & & & & \\
 & & 25x^5 & +35x^4 & +15x^3 & -18x^2 & -28x & -8 & \\
 & & 25x^5 & +25x^4 & +25x^3 & & & & \\
 & & & 10x^4 & -10x^3 & -18x^2 & -28x & -8 & \\
 & & & 10x^4 & +10x^3 & +10x^2 & & & \\
 & & & & -20x^3 & -28x^2 & -28x & -8 & \\
 & & & & -20x^3 & -20x^2 & -20x & & \\
 & & & & & -8x^2 & -8x & -8 & \\
 & & & & & -8x^2 & -8x & -8 & \\
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

  (b). Le polynôme P est donc divisible par le polynôme Q, et en terme de factorisaton, cela se traduit par $P = Q \times P_1$ où $P_1 \in \mathbb{R}_5[x]$.

(2). — En notant $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée à P, il vient :

$$\tilde{P}(2) = 4\times 2^7 - 16\times 2^6 + 9\times 2^5 + 15\times 2^4 + 15\times 2^3 - 18\times 2^2 - 28\times 2 - 8 = \ldots = 0$$

Par suite 2 est bien racine de P.

— On s'intéresse aux dérivées successives P', P", etc. de P, et on va vérifier si 2 est racine ou non de ces derniers.
On a : $P' = 28x^6 - 96x^5 + 45x^4 + 60x^3 + 45x^2 - 36x - 28$ et on montre que $\tilde{P}'(2) = 0$.
De même : $P'' = 168x^5 - 480x^4 + 180x^3 + 180x^2 + 90x - 36$ et on montre que $\tilde{P}''(2) = 0$.
Par contre : $P''' = 840x^4 - 1920x^3 + 540x^2 + 360x + 90$ et on montre que $\tilde{P}'''(2) \neq 0$.
Par conséquent 2 est racine de P avec pour ordre de multiplicité 3.

(3). On déduit des questions précédentes que P peut s'écrire sous la forme $P = \left(x^2+x+1\right)(x-1)^3 \times P_2(x)$ où P_2 est un polynôme de degré 2.
Par ailleurs, le polynôme x^2+x+1 étant de degré 2 à discriminant strictement négatif, ce dernier est irréductible dans $\mathbb{R}$.
Division alors P par le polynôme $\left(x^2+x+1\right)(x-1)^3 = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ pour obtenir P_2.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
4x^7 & -16x^6 & +9x^5 & +15x^4 & +15x^3 & -18x^2 & -28x & -8 & x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8 \\
4x^7 & -20x^6 & +28x^5 & -8x^4 & +16x^3 & -32x^2 & & & 4x^2+4x+1 \\
 & 4x^6 & -19x^5 & +23x^4 & -x^3 & +14x^2 & -28x & -8 & \\
 & 4x^6 & -20x^5 & +28x^4 & -8x^3 & +16x^2 & -32x & & \\
 & & x^5 & -5x^4 & +7x^3 & -2x^2 & +4x & -8 & \\
 & & x^5 & -5x^4 & +7x^3 & -2x^2 & +4x & -8 & \\
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On en déduit donc que : $P = \left(x^2+x+1\right)(x-2)^2\left(4x^2+4x+1\right)$.
Or le polynôme $4x^2+4x+1$ est un polynôme de degré 2 à discriminant nul et de racine double $-\dfrac{1}{2}$. Il est donc factorisable dans $\mathbb{R}[x]$ par : $4x^2+4x+1 = 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$.

Finalement : $P = 4\left(x^2+x+1\right)(x-2)^2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$.