Exercice| [2182] | 1| Sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On considère $H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z = 0\right\}$.

(1). Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une famille génératrice de H.

Éléments de correction

(1). H **est un sous-ensemble de** $\mathbb{R}^4$ **:** c'est le cas par définition de H.

$\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$ **appartient à** H **:** en effet, on a bien $0 - 0 + 0 = 0$ ce qui assure que $\overrightarrow{0} \in H$.

Stabilité de H **par combinaison linéaire** Soient alors $u = (x, y, z, t) \in H$ et $v \in (x', y', z', t') \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que le vecteur $w = \lambda u + v \in H$.

C'est à dire, en notant $w = (x'', y'', z'', t'')$, on doit vérifier que $x'' - y'' + z'' = 0$.

Puisque $w = \lambda u + v$, il est clair que $w = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$.

Par défintion de w, on a : $\begin{cases} x'' = \lambda x + x' \\ y'' = \lambda y + y' \\ z'' = \lambda z + z' \\ t'' = \lambda t + t' \end{cases}$

Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} x'' - y'' + z'' &= \lambda x + x' - (\lambda y + y') + \lambda z + z' \\ &= \lambda \underbrace{(x - y + z)}_{=0} + \underbrace{(x' - y' + z')}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}.$$

Par conséquent $w \in H$.

Ainsi, H contient le vecteur nul et est stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

(2). On a directement par la définition de H que :

$$\begin{aligned} ((x, y, z, t) \in H) &\Leftrightarrow (x - y + z = 0) \\ &\Leftrightarrow \left\{ x = y - z \right. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ y = y \\ z = z \\ t = t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z + 0t \\ y = y + 0z + 0t \\ z = 0y + z + 0t \\ t = 0y + 0z + t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow ((x, y, z, t) \in \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\right)) \end{aligned}$$

Ainsi, $H = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\right)$.