Exercice| [2170] | 1| Produit et puissance

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -11 \\ 0 & -13 & -20 \\ 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

(1). Calculer PQ. En déduire que P est inversible et déterminer son inverse.

(2). Vérifier que $A = P^{-1}DP$ où D est une matrice diagonale que l'on précisera.

(3). En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Pistes de réflexion

(1). Il est fort probable que le produit PQ donne un multiple de l'identité ce qui donnera directement le caractère inversible de P et son inverse.

(2). On commence dans un premier temps par effectuer le calcul PAP^{-1} pour obtenir une matrice D, visiblement diagonale, que l'on retournera ensuite pour obtenir la relation demandée en multipliant à gauche et à droite par P et P^{-1} de façon pertinente.

(3). On montrera par récurrence que $A^n = P^{-1}D^nP$, en ayant au préalable obtenu là encore par récurrence, la forme de la matrice D^n. Il restera ensuite à expliciter tous les coefficients de la matrice A^n.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
ce qui donne que $PQ = \mathrm{I}_3$, autrement dit que P est inversible à droite, donc inversible et d'inverse la matrice Q.

(2). On effectue le produit PAP^{-1} :
$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -11 \\ 0 & -13 & -20 \\ 0 & 12 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est clairement une matrice diagonale, et on a $PAP^{-1} = D$.

En multipliant les deux membres de cette relation à gauche par P^{-1}, il vient que $\underbrace{P^{-1}P}_{=\mathrm{I}_3}AP^{-1} = P^{-1}D$, c'est à dire que $AP^{-1} = P^{-1}D$, et en multipliant les deux membres de cette relation à droite par P, il vient $A\underbrace{P^{-1}P}_{=\mathrm{I}_3} = P^{-1}DP$ c'est à dire $A = P^{-1}DP$.

(3). Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$:« $A^n = P^{-1}D^nP$ et $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ ».

Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on a clairement que $A^0 = \mathrm{I}_3$ et que :
$$\begin{aligned} PD^0P^1 &= P\mathrm{I}_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$
et donc $A^0 = PD^0P^{-1}$.

De même, on a $D^0 = \mathrm{I}_3$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^010 \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$ donc $D^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$.

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &\underset{\text{H.R.}}{=} PD^nP^{-1} \times PDP-1 \\ &= PD^n \underbrace{PP^{-1}}_{=\mathrm{I}_3} DP^{-1} \\ &= PD^n\mathrm{I}_3DP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Par ailleurs :
$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D^n \times D \\ &\underset{\text{H.R.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
et par conséquent $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Il vient alors que :
$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 0 & 2^{n+2} & 5 \times 3^n \\ 0 & 3 \times 2^n & 4 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+3} - 3^{n+2} + 1 & -5 \times 2^{n+1} + 4 \times 3^{n+1} - 2 \\ 0 & 2^{n+4} - 5 \times 3^{n+1} & 20 \times 3^n - 5 \times 2^{n+2} \\ 0 & 3 \times 2^{n+2} - 4 \times 3^{n+1} & 16 \times 3^n - 15 \times 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$