Exercice| [2161] | 1| Calculs de limites

En utilisant éventuellement des équivalents, déterminer les limites au point indiqué des expressions suivantes :

(1). $\dfrac{(1-\cos(x))(1+2x)}{x^2-x^4}$ lorsque x tend vers 0 ;

(2). $\dfrac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(2x)}$ lorsque x tend vers 0 ;

(3). $x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$ lorsque x tend vers 0 ;

(4). $\dfrac{(1-\cos(x))\arctan(x)}{x\tan(x)}$ lorsque x tend vers 0 ;

(5). $\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Pistes de réflexion

— Pour chaque fonction considérée, on essaiera dans un premier temps de déterminer un équivalent simple au voisinage du point considéré.

Éléments de correction

(1). On a clairement que $1+2x \xrightarrow[x\to 0]{} \underbrace{1}_{\neq 0}$ donc $1+2x \underset{x\to 0}{\sim} 1$. De plus $x^2-x^4 = x^2\underbrace{(1-x^2)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1}$ donc $x^2-x^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

Par suite, on en déduit que $\dfrac{(1-\cos(x))(1+2x)}{x^2-x^4} \underset{x\to 0}{\sim} \underbrace{\dfrac{\frac{x^2}{2}\times 1}{x^2}}_{=\frac{1}{2}}$ ce qui donne que $\dfrac{(1-\cos(x))(1+2x)}{x^2-x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$.

(2). On remarque que $\ln(\cos(x)) = \ln(1+(\cos(x)-1))$ avec $\cos(x)-1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Par suite, $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(x)-1$ et par suite que $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

Par ailleurs, $2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $1-\cos(2x) \underset{x\to 0}{\sim} \underbrace{\dfrac{(2x)^2}{2}}_{=2x^2}$.

Par conséquent on obtient que $\dfrac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(2x)} \underset{x\to 0}{\sim} \underbrace{\dfrac{-\frac{x^2}{2}}{2x^2}}_{=-\frac{1}{4}}$.

Ce qui donne que $\dfrac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(2x)} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{4}$.

(3). On a clairement que $3+x \xrightarrow[x\to 0]{} \underbrace{3}_{\neq 0}$, donc $3+x \underset{x\to 0}{\sim} 3$. De même, $\sqrt{x+3} \xrightarrow[x\to 0]{} \sqrt{3}$.

Comme $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $\sin(\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$.

Finalement, on en déduit que $x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} \underset{x\to 0}{\sim} \underbrace{x\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}}_{=3\sqrt{3}}$.

AInsi, $x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} \xrightarrow[x\to 0]{} 3\sqrt{3}$.

(4). On a directement que $\dfrac{(1-\cos(x))\arctan(x)}{x\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \underbrace{\dfrac{\frac{x^2}{2}\times x}{x\times x}}_{=\frac{1}{2}}$ et par suite $\dfrac{(1-\cos(x))\arctan(x)}{x\tan(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$.

(5). On a $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ donc $\sqrt{x+1} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$. Comme $x+2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, on en déduit que $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \underbrace{\dfrac{\sqrt{x}}{x}}_{=\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Or $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et par suite, $\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ et par suite $\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Comme précédemment, on a $\sqrt{4x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}$. On en déduit alors que $\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \underbrace{2\sqrt{x}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{=-2}$ ce qui donne que $\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -2$.