Exercice| [2159] | 1| Équivalents de fonctions

Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

(1). $f(x)=\dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$;

(2). $g(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{\cos(3x)-1}$;

(3). $h(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(2x^2)}$;

(4). $i(x)=\ln(\cos(x))$;

(5). $j(x)=\dfrac{(1-\cos(x))\ln(1+x^2)}{x^3\tan^2(3x)}$;

(6). $k(x)=\dfrac{\sqrt{\cos(x)}-1}{1-\cos(2x)}$.

(7). $\ell(x)=\ln(1+\sin(x))$;

(8). $m(x)=\sin(x^2)\ln(1+x^2)$;

Pistes de réflexion

— Pour chacune de ces fonctions, il s'agit de remobiliser les formules d'équivalents usuels en faisant attention de bien s'assurer que l'on travaille au voisinage de 0 pour certaines expressions.

Éléments de correction

(1). On a directement que $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{x\times x}{\frac{x^2}{2}}$ ce qui amène $f(x)\underset{x\to0}{\sim}2$.

(2). Puisque $2x\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ et $3x\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ on obtient directement que $g(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{2x}{-\frac{(3x)^2}{2}}$ ce qui amène à $g(x)\underset{x\to0}{\sim}-\dfrac{4}{9x}$.

(3). Puisque $2x^2\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, on a directement que $h(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{2x^2}$ ce qui amène à $h(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{4}$.

(4). On remarque que $\ln(\cos(x))=\ln(1+(\cos(x)-1))$ avec $\cos(x)-1\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ ce qui permet d'écrire que $i(x)\underset{x\to0}{\sim}\cos(x)-1$ et par suite que $i(x)\underset{x\to0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$.

(5). Puisque $x^2\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ et $3x\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, on a directement que $j(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\frac{x^2}{2}\times x^2}{x^3\times(3x)^2}$ ce qui donne finalement que $j(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{18x}$.

(6). En remarquant que $\sqrt{\cos(x)}-1=\sqrt{1+(\cos(x)-1)}-1$ avec $\cos(x)-1\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ et puisque $2x\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, il vient que $k(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\frac{1}{2}(\cos(x)-1)}{\frac{(2x)^2}{2}}$ et donc que $k(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}}{2x^2}$ ce qui donne finalement que $k(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{8}$.

(7). Puisque $\sin(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, il vient que $\ln(1+\sin(x))\underset{x\to0}{\sim}\sin(x)$ et comme $\sin(x)\underset{x\to0}{\sim}0$, on a $\ell(x)\underset{x\to0}{\sim}x$.

(8). Puisque $x^2\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, on a directement que $m(x)\underset{x\to0}{\sim}x^2\times x^2$ ce qui donne $m(x)\underset{x\to0}{\sim}x^4$.