Exercice| [2152] | 1| Séries géométriques

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$$

(1). Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(2). Exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

(3). En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{3}{2}$.

(4). Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\quad T_{n+1} = \dfrac{T_n + S_n}{3}$.

(5). Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad T_n \leq 1$.

(6). Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(7). En déduire la convergence et la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pistes de réflexion

(1). Revenir à la définition en déterminant le signe de $S_{n+1} - S_n$.

(2). Remarquer qu'il s'agit d'une somme du type $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$, puis prendre la limite dans la formule obtenue.

(3). Utiliser l'expressionde S_n pour en déduire un majorant de la suite.

(4). Il suffit d'écrire ce qu'est T_{n+1} et de faire un petit changement d'indice.

(5). On effectue le raisonnement par récurrence demandé.

(6). On détermine le signe de $T_{n+1} - T_n$.

(7). Utiliser le théorème de la limite monotone.

Éléments de correction

(1). On étudie le signe de $S_{n+1} - S_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad S_{n+1} - S_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{3^k} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}} \geq 0.$

Par conséquent, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante.

(2). On a directement que $S_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$.

(3). La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Si elle n'était pas majorée, elle ne pourrait pas converger. Or on vient de voir que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$, donc elle est majorée, et elle l'est notamment par la valeur de sa limite, ici $\frac{3}{2}$.

(4). Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} \\ &\underset{\substack{\text{changement d'indice} \\ k=j+1}}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{j+1}{3^{j+1}} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{3^j} + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{3^j} \\ &= \frac{1}{3}T_n + \frac{1}{3}S_n \end{aligned}$$

(5). Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: ´ $T_n \leq 1$ ˇ.

Montrons par récurrence sur n, que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

— **Initialisation :** vérifions que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n = 0$, c'est à dire que $T_0 = \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{k}{3^k} \leq 1$.

On a : $\quad T_0 = \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{k}{3^k} = 0$ et $0 \leq 1$, donc on a clairement $T_0 \leq 1$, et par suite, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— **Hérédité :** supposons que pour $n\in\mathbb{N}$, on ait $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $T_n \leq 1$, et montrons alors que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$ c'est à dire $T_{n+1} \leq 1$.

On a dans un premier temps que : $\quad T_{n+1} = \frac{1}{3}T_n + \frac{1}{3}S_n$.

Comme $S_n \leq \frac{3}{2}$, on a $\frac{1}{3}S_n \leq \frac{1}{2}$. Puisque par hypothèse de récurrence, $T_n \leq 1$, on a $\frac{1}{3}T_n \leq \frac{1}{3}$, et ainsi $\frac{1}{3}T_n + \frac{1}{3}S_n \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \leq 1$, et on a ainsi $\mathcal{P}(n+1)$.

— **Conclusion :** la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

(6). On étudie le signe de $T_{n+1} - T_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad T_{n+1} - T_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \geq 0.$

Par conséquent, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante.

(7). La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante majorée, elle converge vers un réel ℓ.

Compte-tenu de la relation $T_{n+1} = \dfrac{T_n + S_n}{3}$, cette dernière vérifie ainsi la relation $\ell = \dfrac{\ell + \frac{3}{2}}{3}$ qui conduit après résolution à $\ell = \frac{3}{4}$.