Exercice| [2150] | 1| Équivalents

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

**(1).** $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\,a}$.

**(2).** $(n+1)^\alpha - n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n^{\alpha-1}$.

**(3).** $n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

**(4).** $(n+a)^n - n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\mathrm{e}^{\,a}-1\right) n^n$.

Éléments de correction

**(1).** Pour tout$n$, on a $\left(1+\frac{a}{n}\right) = \mathrm{e}^{\,n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0$, il vient $\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n}$, donc $n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} a$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) = a$ et par composition des limites, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\,a}$.

**(2).** On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right)$.

Or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$ d'où $(n+1)^\alpha - n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n^{\alpha-1}$.

**(3).** On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) = n\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{\ln(n)}{n} = \ln(n)$.

**(4).** — On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $(n+a)^n = \left(n\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)^n = n^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$.

Par ailleurs, on a déjà vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\,a}$, d'où $(n+a)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\,a} n^n$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+a)^n - n^n = n^n\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - 1\right)$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - 1 = \mathrm{e}^{\,a} - 1$, on obtient $(n+a)^n - n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\mathrm{e}^{\,a}-1\right) n^n$.