Exercice| [2147] | 1| Systèmes linéaires

Résoudre, en discutant suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$, le système :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Pistes de réflexion

— Utiliser la représentaton matricielle du système.
— Échelonner la matrice augmentée du système et discuter sur la nature des opérations élémentaires effectuées conditionnées par les valeurs de k pour poursuivre l'échelonnement et étudier chacun des cas soulevés.

Éléments de correction

Écrivons la matrice augmentée du système $\mathcal{S}$ et échelonnons dans un premier temps cette dernière.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & -1 & -1-2k & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & 0 & 4+k & k-1 \end{array}\right)$$

Pour pouvoir poursuivre l'échelonnement du système et le mettre sous forme échelonné réduit, il faut procéder à l'opération $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{k+4} L_3$, qui est conditionnée par le fait que $k+4$ ne doit pas être nul.

— Si $k + 4 \neq 0$, c'est à dire $k \neq -4$, on poursuit l'échelonnement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & 0 & 4+k & k-1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{k+4} L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{k-1}{k+4} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (2-3k)L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - kL_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \dfrac{5}{k+4} \\ 0 & -2 & 0 & \dfrac{2\left(2k^2 - 2k + 5\right)}{k+4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{k-1}{k+4} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{3k^2 - 2k - 6}{k+4} \\ 0 & -2 & 0 & \dfrac{2\left(2k^2 - 2k + 5\right)}{k+4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{k-1}{k+4} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{3k^2 - 2k - 6}{k+4} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-2k^2 + 2k - 5}{k+4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{k-1}{k+4} \end{array}\right)$$

Par conséquent, dans le cas où $k \neq -4$, l'ensemble des solutions du système est $\left\{\left(\dfrac{3k^2 - 2k - 6}{k+4}, \dfrac{-2k^2 + 2k + 5}{k+4}, \dfrac{k-1}{k+4}\right)\right\}$.

— Si $k + 4 = 0$, c'est à dire $k = -4$, en remplaçant k par cette valeur dans la dernière matrice augmentée, on obtient : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-3k & k-3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$, la dernière ligne de celle-ci donnant l'équation de compatibilité « $0 = -5$ », qui permet de conclure quant à l'incompatibilité du système dans ce cas là.