Exercice| [2144] | 1| Dimension d'un sous-espace

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x],\ P(1) = 0\}$.

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(2). Déterminer une base de F.

(3). En déduire la dimension de F.

Pistes de réflexion

(1). La stabilité par combinaison linéaire vient du fait que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour f et g deux fonctions.

(2). Pour un polynôme P de degré 3 quelconque de $\mathbb{R}_3[x]$, on traduit la condition d'appartenance à F sur les coefficients de F, de sorte à voir ce polynôme comme combinaison linéaire d'autres, ce qui donnera une famille génératrice de F, et dont on étudiera ensuite la liberté.

(3). La base trouvée précédemment donne directement la dimension de F.

Éléments de correction

(1). **F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_3[x]$:** par construction

Le vecteur nul $\tilde{0}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ appartient à F : en effet, $\tilde{0}(1) = 0$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $\left\{\begin{array}{ccc} P_1 & \in & F \\ P_2 & \in & F \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$.

On pose $P_3 = \lambda P_1 + P_2$ et montrons que $P_3 \in F$, c'est à dire $P_3(1) = 0$.

Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} P_3(0) & = & (\lambda P_1 + P_2)(1) \\ & = & \lambda \underbrace{P_1(1)}_{\substack{=0 \text{ car} \\ P_1 \in F}} + \underbrace{P_2(1)}_{\substack{=0 \text{ car} \\ P_2 \in F}} \\ & = & \lambda \times 0 + 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

et ainsi $P_3 \in F$.

(2). **Recherche d'une famille génératrice de F :** En notant $P : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{array}{rl} & (P \in F) \\ \Leftrightarrow & (P(1) = 0) \\ \Leftrightarrow & (a+b+c+d = 0) \\ \Leftrightarrow & (a = -b-c-d) \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccrrr} a & = & -b & -c & -d \\ b & = & b & & \\ c & = & & c & \\ d & = & & & d \end{array}\right. \quad (b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \\ \Leftrightarrow & \left(\exists\,(b,c,d) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (-b-c-d)x^3 + bx^2 + cx + d\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = b\left(-x^3 + x^2\right) + c\left(-x^3 + c\right) + d\left(-x^3 + 1\right)\right) \\ \Leftrightarrow & \left(P \in \mathrm{Vect}\ \left(x \longmapsto -x^3 + x^2, x \longmapsto -x^3 + x, x \longmapsto -x^3 + 1\right)\right) \end{array}$$

Ainsi, la famille formée des 3 vecteurs $P_1 : x \longmapsto -x^3 + x^2$, $P_2 : x \longmapsto -x^3 + x$ et $P_3 : x \longmapsto -x^3 + 1$ est une famille génératrice de F.

Caractère libre de la famille génératrice obtenue : On note $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

Par ailleurs, en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3)$ la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, puisque $\mathcal{F}$ est une famille de 3 vecteurs, par théorème, on sait que :

$$(\mathcal{F} \text{ est une famille libre de 3 vecteurs}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}\ (A) = 3)$$

Puisque l'on a : $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, un échelonnement en lignes donnera que $\mathrm{rg}\,(A) = 3$, ce qui assure ainsi le caractère libre de la famille $\mathcal{F}$.

Base de F : La famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ étant une famille libre et génératrice de F, elle en forme donc une base.

(3). La dimension de F étant égale au nombre de vecteurs d'une quelconque de ses bases, on en déduit que $\dim(F) = 3$.