Exercice| [2133] | 1| Systèmes linéaires

Pour les deux systèmes suivants :

- Déterminer le rang du système ;
- Déterminer la matrice échelonnée réduite du système ;
- Le résoudre.

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x - \ y - 2z = -2 \\ -x + 3y - 2z = 7 \\ 5x - 5y + 6z = -11 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} -2t + \ x - 2y + 3z = -12 \\ -t + \ x - \ y + \ z = -5 \\ 2t + 2x + 3y - \ z = 15 \\ -2t + 4x + \ y + \ z = -1 \end{cases}$$

Pistes de réflexion

- Écrire la représentation matricielle du système. . .
- Faire opérer l'algorithme de Gauss jusqu'à pouvoir lire le rang du système. . .
- Poursuivre l'échelonnement jusqu'à obtenir les solutions du système.

Éléments de correction

- **Résolution du système $\mathcal{S}_1$:** on travaille à partir de la matrice augmentée pour obtenir son rang dans un premier temps, puis sa matrice échelonnée réduite, et finalement ses solutions.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \\ 5 & -5 & 6 & -11 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 12 \\ 0 & -5 & 22 & -12 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{16} L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 6L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est par ailleurs de rang 3, puisque présentant 3 pivots non nuls.

Les solutions sont ainsi : $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)\right\}}$.

- **Résolution du système $\mathcal{S}_2$:** on adopte la même démarche.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 6 & 39 \\ 0 & 9 & -11 & 6 & 47 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 9L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & -16 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Là encore, nous n'avons pas tout à fait la matrice échelonnée. Cependant, nous voyons que le nombre de pivot est 4, et donc le rang sera de 4. Il y aura ainsi une unique solution, puisqu'il s'agit d'un système à 4 équations et 4 inconnues.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_4 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 14 & 0 - 14 & \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 14L_2 + 4L_3 \\ L_1 \leftarrow 14L_1 - 3L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 14 & -28 & 0 & 0 & -42 \\ 0 & 28 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 28 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{14} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{28} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{14} L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{2} L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Finalement, la solution du système $\mathcal{S}_2$ est : $\boxed{(1, 2, -1, 3)}$