Exercice| [2129] | 1| Matrices

Exprimer la matrice suivante comme somme de deux matrices dont les coefficients ne sont pour l'une que des multiples de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ pour l'autre.

$$\begin{pmatrix} \ln(27) & \ln\left(\frac{1}{27}\right) & \ln\left(6^3\right) & \ln\left(\frac{1}{3^4}\right) & \ln(48) \\ \ln(3) & \ln\left(\frac{1}{24}\right) & \ln\left(\frac{1}{6}\right) & 6\ln\left(\frac{4}{9}\right) & \ln\left(\sqrt{72}\right) \\ \ln(36) & -\ln(3) & \ln(2) & \ln\left(\frac{81}{36}\right) & \ln(64) \\ \ln\left(\frac{2}{3}\right) & \ln(96) & \ln\left(2^7\times 3^4\right) & \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \ln(1) \end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

Pour chaque terme de la matrice, il s'agira :
- d'exprimer sous forme d'un produit de puissances de 2 et de 3 les nombres dont on évalue leur logarithme.
- d'utiliser les propriétés opératoires de la fonction logarithme.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \ln(27) & \ln\left(\frac{1}{27}\right) & \ln\left(6^3\right) & \ln\left(\frac{1}{3^4}\right) & \ln(48) \\ \ln(3) & \ln\left(\frac{1}{24}\right) & \ln\left(\frac{1}{6}\right) & 6\ln\left(\frac{4}{9}\right) & \ln\left(\sqrt{72}\right) \\ \ln(36) & -\ln(3) & \ln(2) & \ln\left(\frac{81}{36}\right) & \ln(64) \\ \ln\left(\frac{2}{3}\right) & \ln(96) & \ln\left(2^7\times 3^4\right) & \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \ln(1) \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} \ln\left(3^3\right) & \ln\left(\frac{1}{3^3}\right) & \ln\left(2^3\times 3^3\right) & \ln\left(\frac{1}{3^4}\right) & \ln\left(2^4\times 2^4\times 3\right) \\ \ln(3) & \ln\left(\frac{1}{2^3\times 3}\right) & \ln\left(\frac{1}{2\times 3}\right) & 6\ln\left(\frac{2^2}{3^2}\right) & \ln\left(\sqrt{2^3\times 3^2}\right) \\ \ln\left(2^2\times 3^2\right) & -\ln(3) & \ln(2) & \ln\left(\frac{3^4}{2^2\times 3^2}\right) & \ln\left(2^6\right) \\ \ln\left(\frac{2}{3}\right) & \ln\left(2^5\times 3\right) & \ln\left(2^7\times 3^4\right) & \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \ln(1) \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} 3\ln(3) & -3\ln(3) & 3\ln(2)+3\ln(3) & -4\ln(3) & 4\ln(2)+\ln(3) \\ \ln(3) & -3\ln(2)+\ln(3) & -3\ln(2) & 6\left(2\ln(2)+2\ln(3)\right) & \frac{1}{2}\ln\left(2^3\times 3^2\right) \\ 2\ln(2)+2\ln(3) & -\ln(3) & \ln(2) & 2\ln(3)-2\ln(2) & 6\ln(2) \\ \ln(2)-\ln(3) & 5\ln(2)+\ln(3) & 7\ln(2)+4\ln(3) & -\frac{1}{2}\ln(2) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \ln(27) & \ln\left(\frac{1}{27}\right) & \ln\left(6^3\right) & \ln\left(\frac{1}{3^4}\right) & \ln(48) \\ \ln(3) & \ln\left(\frac{1}{24}\right) & \ln\left(\frac{1}{6}\right) & 6\ln\left(\frac{4}{9}\right) & \ln\left(\sqrt{72}\right) \\ \ln(36) & -\ln(3) & \ln(2) & \ln\left(\frac{81}{36}\right) & \ln(64) \\ \ln\left(\frac{2}{3}\right) & \ln(96) & \ln\left(2^7\times 3^4\right) & \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \ln(1) \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\ln(2) & 0 & 4\ln(2) \\ 0 & -3\ln(2) & -3\ln(2) & 12\ln(2) & \frac{3}{2}\ln(2) \\ 2\ln(2) & 0 & \ln(2) & -2\ln(2) & 6\ln(2) \\ \ln(2) & 5\ln(2) & 7\ln(2) & -\frac{1}{2}\ln(2) & 0 \end{pmatrix} \\ &+\begin{pmatrix} 3\ln(3) & -3\ln(3) & 3\ln(3) & -4\ln(3) & \ln(3) \\ \ln(3) & \ln(3) & 0 & 12\ln(3) & \ln(3) \\ 2\ln(3) & -\ln(3) & 0 & 2\ln(3) & 0 \\ -\ln(3) & \ln(3) & 4\ln(3) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =&\ln(2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 12 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &+\ln(3)\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 12 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$