Exercice| [2122] | 1| Déterminer un noyau et une image

(1). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a). Est-ce que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A)$? Et $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$? Et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(b). Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(c). Déterminer le noyau et l'image de la matrice A.

(2). On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a). Montrer que $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(B)$.

(b). Calculer $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c). Déterminer le noyau et l'image de B.

(3). On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a). Montrer que $\mathrm{Ker}\,(C) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b). Déterminer l'image de la matrice C.

(4). On considère la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a). Calculer $D \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comment interprêter ce résultat ?

(b). Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(D)$. En est-il de même de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(c). Déterminer le noyau et l'image de D.

Pistes de réflexion

(1). (a). En utilisant la définition du noyau, pour que $X_1 \in \mathrm{Ker}\,(A)$, on doit avoir $AX_1 = (0)$.

(b). De la relation $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenue, on en déduit par la définition de $\mathrm{Im}\,(A)$ que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Im}\,(A)$.

(c). Il s'agira de déterminer les solutions du système de représentation matricielle $(A|0)$ pour obtenir le noyau de A, et exploiter les relations de compatibilités du système de représentation matricielle $(A|\bullet)$ pour obtenir une description de $\mathrm{Im}\,(A)$.

(2). (a). On calculera AX_1 et on vérifiera que ce produit est nul.

(b). Les deux produits matriciels à effectuer devront s'interprêter en termes « d'antécédents » pour montrer que les deux matrices colonnes proposées appartiennent à l'image de B en revenant à la définition de l'image de B.

(c). Il s'agira de déterminer les solutions du système de représentation matricielle $(B|0)$ pour obtenir le noyau de B, et exploiter les relations de compatibilités du système de représentation matricielle $(B|\bullet)$ pour obtenir une description de $\mathrm{Im}\,(B)$.

(3). (a). Il s'agira de déterminer les solutions du système de représentation matricielle $(C|0)$ pour obtenir le noyau de C.

(b). Il s'agira de déterminer les relations de compatibilités du système de représentation matricielle $(C|\bullet)$ pour obtenir une description de $\mathrm{Im}\,(B)$.

(4). (a). Il est probable que le produit matriciel demandé soit nul...

(b). On cherche les antécédents de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par $f : X \longmapsto DX$. Si on en trouve, ce vecteur appartient à $\mathrm{Im}\,(D)$, sinon...

(c). Il s'agira de déterminer les solutions du système de représentation matricielle $(D|0)$ pour obtenir le noyau de D, et exploiter les relations de compatibilités du système de représentation matricielle $(D|\bullet)$ pour obtenir une description de $\mathrm{Im}\,(D)$.

Éléments de correction

(1). (a). Par définition : $(X_1 \in \mathrm{Ker}\,(A)) \Leftrightarrow (AX_1 = (0))$.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} AX_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0) \end{aligned}$$

et par suite $X_1 \in \mathrm{Ker}\,(A)$.

Sur le même principe, on a :
$$\begin{aligned} AX_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0) \end{aligned}$$

et ainsi $X_2 \in \mathrm{Ker}\,(A)$.

Et pour finir : $$AX_3 = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = (0)$$
ce qui signifie aussi que $X_3 \in \mathrm{Ker}\,(A)$.

(b). Un calcul direct donne que : $$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = X$$

Par suite, il existe une matrice colonne $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ telle que $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = X$, ce qui signifie que $X \in \mathrm{Im}\,(A)$.

(c). **Recherche du noyau de A :** Par définition :
$$\mathrm{Ker}\,(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = (0)\}$$

On en déduit donc que :
$$\left(X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A)\right) \Leftrightarrow (AX = (0)) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}(x_1, x_2, x_3) \text{ est solution}\\ \text{du système de}\\ \text{représentation matriciele } (A|0)\end{array}\right)$$

On procède à un échelonnement en lignes du système :
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

En notant $x_1, \ldots, x_3$ les inconnues du système, on en déduit les relations :
$$\left\{\ x_1 = -x_2 - x_3\right.$$

Par suite, il vient :
$$\left(X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A)\right) \Leftrightarrow (x_1 = -x_2 - x_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc}x_1 &=& -x_2 &-& x_3\\ x_2 &=& x_2 && \\ x_3 &=& && x_3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left(X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right)$$

et donc on a : $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Recherche de l'image de A : Par définition :
$$\mathrm{Im}\,(A) = \{Y \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = Y\}$$

Par suite, il vient :
$$\left(Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(A)\right) \Leftrightarrow (\exists X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = Y) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Le système de représentation}\\ \text{matricielle } (A|Y)\\ \text{est compatible}\end{array}\right)$$

On procède alors à un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $(A|Y)$ pour en déterminer les équations de compatibilités.
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&y_1\\1&1&1&y_2\\1&1&1&y_3\end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&y_1\\0&0&0&y_2 - y_1\\0&0&0&y_3 - y_1\end{array}\right)$$

Ce système présente deux équations de compatibilité que sont $y_2 - y_1 = 0$ et $y_3 - y_1 = 0$.
Par suite, on en déduit que :
$$\mathrm{Im}\,(A) = \left\{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \left\{\begin{array}{cccccc}-y_1 &+& y_2 && &= 0\\ -y_1 && &+& y_3 &= 0\end{array}\right.\right\}$$

On peut par ailleurs chercher une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(A)$:
$$\left(Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(A)\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc}-y_1 &+& y_2 && &= 0\\ -y_1 && &+& y_3 &= 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc}y_2 &=& y_1\\ y_3 &=& y_1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc}y_1 &=& y_1\\ y_2 &=& y_1\\ y_3 &=& y_1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left(Y \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right)$$

et par suite, on a : $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Cependant, c'est un résultat que l'on pouvait obtenir autrement puisque l'on sait par théorème que $\mathrm{Im}\,(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de ses colonnes : $$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

(2). (a). Par définition : $(X_1 \in \mathrm{Ker}\,(B)) \Leftrightarrow (BX_1 = (0))$.

Un calcul direct donne que :
$$BX_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par suite $X_1 \in \mathrm{Ker}\,(B)$.

(b). Un calcul direct donne que :
$$B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même, on a :
$$B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Par suite, il existe deux vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tels que $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, c'est à dire que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(B)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(B)$.

(c). Recherche du noyau de B : Par définition :
$$\mathrm{Ker}\,(B) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = (0)\}$$

On en déduit donc que :
$$\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(B)\right) \Leftrightarrow (BX = (0)) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}(x_1, x_2, x_3) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation matricielle } (B|0)\end{array}\right)$$

On procède à un échelonnement en lignes du système :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_1 \leftarrow -1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \ldots, x_3$ les inconnues du système, on en déduit les relations :
$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Par suite, il vient :
$$\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(B)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$$

et donc on a : $\mathrm{Ker}\,(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Recherche de l'image de B : Par définition :
$$\mathrm{Im}\,(B) = \{Y \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ BX = Y\}$$

Par suite, il vient :
$$\left(Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(B)\right) \Leftrightarrow (\exists X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ BX = Y) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Le système de représentation} \\ \text{matricielle } (B|Y) \\ \text{est compatible}\end{array}\right)$$

On procède alors à un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $(B|Y)$ pour en déterminer les équations de compatibilités.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & y_1 \\ 3 & -2 & -4 & y_2 \\ -2 & 1 & 3 & y_3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & -1 & 3y_1 + y_2 \\ 0 & -1 & 1 & -2y_1 + y_3 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & -1 & 3y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 + y_2 + y_3 \end{array}\right)$$

Ce système présente une équation de compatibilité qui est $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.
Par suite, on en déduit que :
$$\mathrm{Im}\,(B) = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ y_1 + y_2 + y_3 = 0\right\}$$

On peut par ailleurs chercher une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(B)$:

$$\left(Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(B)\right) \Leftrightarrow (y_1 + y_2 + y_3 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (y_1 = -y_2 - y_3)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} y_1 & = & -y_2 & - & y_3 \\ y_2 & = & y_2 & & \\ y_3 & = & & & y_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left(Y \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

et par suite on a : $\mathrm{Im}\,(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(3). (a). Par définition :

$$\mathrm{Ker}\,(C) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\, CX = (0)\}$$

On en déduit donc que :

$$\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(C)\right) \Leftrightarrow (CX = (0))$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation matricielle } (C|0) \end{array} \right)$$

On procède à un échelonnement en lignes du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \ldots, x_3$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Par suite, il vient :

$$\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(C)\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left(X \in \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

et donc on a : $\mathrm{Ker}\,(C) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

(b). Par définition :

$$\mathrm{Im}\,(C) = \{Y \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\, \exists X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\, CX = Y\}$$

Par suite, il vient :

$$\left(Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(C)\right) \Leftrightarrow (\exists X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\, CX = Y)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Le système de représentation} \\ \text{matricielle } (C|Y) \\ \text{est compatible} \end{array} \right)$$

On procède alors à un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $(C|Y)$ pour en déterminer les équations de compatibilités.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 1 & 1 & 0 & y_3 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 1 & 0 & y_3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & -1 & -y_2 + y_3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & -2 & -y_1 - y_2 + y_3 \end{array}\right)$$

Ce système ne présentant aucune équation de compatibilité conduisant à une incompatibilité du système, il admet toujours une solution.
Par conséquent : $\mathrm{Im}\,(C) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(4). (a). Un calcul direct donne que :

$$D\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)$$

Par suite, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(D)$.

(b). Par définition, on a :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(D)\right) \Leftrightarrow \left(\exists X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\, DX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Le système de représentation} \\ \text{matricielle } \left(D \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.\right) \text{ est compatible} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ce système ne présentant aucune équation de compatibilité conduisant à une incompatibilité du système, il admet toujours une solution, et par suite il vient que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(D)$.

Sur le même principe :

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(D) \right) \Leftrightarrow \left(\exists X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ DX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{Le système de représentation matricielle } \left(\begin{array}{c|c} D & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) \text{ est compatible} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ce système ne présentant aucune équation de compatibilité conduisant à une incompatibilité du système, il admet toujours une solution, et par suite il vient que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(D)$.

(c). Recherche du noyau de D : Par définition :

$$\mathrm{Ker}\,(D) = \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ DX = (0)\}$$

On en déduit donc que :

$$\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(D) \right) \Leftrightarrow (DX = (0))$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation matriciele } (D|0) \end{array} \right)$$

On procède à un échelonnement en lignes du système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \ldots, x_4$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Par suite, il vient :

$$\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(D) \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left(X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$$

et donc on a : $\quad \mathrm{Ker}\,(D) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Recherche de l'image de D : Par définition :

$$\mathrm{Im}\,(D) = \{Y \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ DX = Y\}$$

Par suite, il vient :

$$\begin{aligned}\left(Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(D)\right) &\Leftrightarrow \left(\exists X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ DX = Y\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Le système de représentation}\\ \text{matricielle } (D|Y)\\ \text{est compatible}\end{array}\right)\end{aligned}$$

On procède alors à un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $(D|Y)$ pour en déterminer les équations de compatibilités.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 1 & 0 & -1 & y_1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & y_2\\ 0 & -1 & 0 & -1 & y_3\\ -1 & 0 & -1 & 0 & y_4\end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 0 & y_2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & y_1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & y_3\\ -1 & 0 & -1 & 0 & y_4\end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 0 & y_2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & y_1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & y_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 + y_4\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 0 & y_2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & y_1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & y_1 + y_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 + y_4\end{array}\right)$$

Ce système présente une équation de compatibilité qui est $y_2 + y_4 = 0$.
Par suite, on en déduit que :

$$\mathrm{Im}\,(B) = \left\{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ y_2 + y_4 = 0\right\}$$

On peut par ailleurs chercher une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(B)$:

$$\begin{aligned}\left(Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(B)\right) &\Leftrightarrow (y_2 + y_4 = 0)\\ &\Leftrightarrow (y_2 = -y_4)\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc}y_1 & = & y_1 & & & & \\ y_2 & = & & & & - & y_4\\ y_3 & = & & & y_3 & & \\ y_4 & = & & & & & y_4\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left(Y \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

et par suite on a : $\quad \mathrm{Im}\,(D) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.