Exercice| [2119] | 1| Polynômes de matrices et inversibilité

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer C^2 et C^3, puis vérifier que $C^3 = 3C^2 - 2C$. En déduire que C n'est pas inversible.

Pistes de réflexion

- On évalue donc A^2 et $A + 2\mathrm{I}_3$.
- On utilise ensuite l'expression précédente de sorte à obtenir une écriture de la forme $A \times B = (0)$ qui permettra de faire un raisonnement par l'absurde pour établir le caractère non inversible de la matrice C.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et par suite que :
$$\begin{aligned} C^3 &= C^2 \times C \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} 3C^2 - 2C &= 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= C^3 \end{aligned}$$

Supposons que la matrice C soit inversible, c'est à dire que C^{-1} existe.
En multipliant les deux membres de la relation $C^3 = 3C^2 - 2C$ à gauche par C^{-1}, on a donc $C^{-1} \times C^3 = C^{-1}\left(3C^2 - 2C\right)$ ce qui donne $C^2 = 3C^{-1}C^2 - 2C^{-1}C$ c'est à dire $C^2 = 3C - 2\mathrm{I}_3$.
Or $3C - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et on a clairement $3C - 2\mathrm{I}_3 \neq C^2$, donc l'hypothèse C inversible est absurde, ce qui signifie que C n'est pas inversible.