Exercice| [2116] | 1| Étude de l'inversibilité

Étudier l'inversibilité de ces quatre matrices et déterminer leur inverse le cas échéant.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 2 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 2 et la matrice est n'est pas inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 2.

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 4 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 4 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 4 et de rang 4.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{9}{4}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -1L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -2L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{2}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow -1L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -1L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$