Exercice| [2079] | 1| Sommes finies

(1). À l'aide de la formule du binôme, calculer :

(a). $A = (1+i)^8$;

(b). $B = (1-i)^7$;

(c). $C = (2-3i)^5$;

(d). $D = (5+4i)^6$

On exprimera les résultats sous forme algébrique, c'est à dire sous la forme $a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(2). Déduire des calculs précédents :

(a). $\sum_{k=0}^{7} (1+i)^k$;

(b). $\sum_{k=0}^{6} (1-i)^k$;

(c). $\sum_{k=0}^{4} (2-3i)^k$;

(d). $\sum_{k=0}^{5} (5+4i)^k$

Pistes de réflexion

(1). Écrire le triangle de Pascal jusqu'à un ordre suffisant, puis développer la formule du binôme correspondante, puis mettre sous forme algébrique l'expression obtenue en calculant les puissances de i qui apparaissent.

(2). Cela ressemble beaucoup à une somme du type $\sum_{k=0}^{n} q^k \ldots$

Éléments de correction

(1).(a).

$$\begin{aligned}
(1+i)^8 &= \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 1^{8-k} i^k \\
&= \binom{8}{0} \times 1^8 \times i^0 + \binom{8}{1} \times 1^7 \times i^1 + \binom{8}{2} \times 1^6 \times i^2 + \binom{8}{3} \times 1^5 \times i^3 \\
&\quad + \binom{8}{4} \times 1^4 \times i^4 + \binom{8}{5} \times 1^3 \times i^5 + \binom{8}{6} \times 1^2 \times i^6 + \binom{8}{7} \times 1^1 \times i^7 \\
&\quad + \binom{8}{8} \times 1^0 \times i^8 \\
&= 1 + 8i + 28i^2 + 56i^3 + 70i^4 + 56i^5 + 28i^6 + 8i^7 + i^8 \\
&= 1 + 8i - 28 - 56i + 70 + 56i - 28 - 8i + 1 \\
&= 16
\end{aligned}$$

(b).

$$\begin{aligned}
(1-i)^7 &= \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 1^{7-k} (-i)^k \\
&= \binom{7}{0} \times 1^7 \times (-i)^0 + \binom{7}{1} \times 1^6 \times (-i)^1 + \binom{7}{2} \times 1^5 \times (-i)^2 \\
&\quad + \binom{7}{3} \times 1^4 \times (-i)^3 + \binom{7}{4} \times 1^3 \times (-i)^4 + \binom{7}{5} \times 1^2 \times (-i)^5 \\
&\quad + \binom{7}{6} \times 1^1 \times (-i)^6 + \binom{7}{7} \times 1^0 \times (-i)^7 \\
&= 1 - 7i - 21 + 35i + 35 - 21i - 7 + i \\
&= 8 + 8i
\end{aligned}$$

(c).

$$\begin{aligned}
(2-3i)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^{5-k} \times (-3i)^5 \\
&= \binom{5}{0} \times 2^5 \times (-3i)^0 + \binom{5}{1} \times 2^4 \times (-3i)^1 + \binom{5}{2} \times 2^3 \times (-3i)^2 \\
&\quad + \binom{5}{3} \times 2^2 \times (-3i)^3 + \binom{5}{4} \times 2^1 \times (-3i)^4 + \binom{5}{5} \times 2^0 \times (-3i)^5 \\
&= 32 - 5 \times 16 \times 3i - 10 \times 8 \times 9 + 10 \times 4 \times 27i + 5 \times 2 \times 81 - 243i \\
&= 32 - 240i - 720 + 1080i + 810 - 243i \\
&= 122 + 597i
\end{aligned}$$

(d).

$$\begin{aligned}
(5+4i)^6 &= \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 5^{6-k} (4i)^k \\
&= \binom{6}{0} \times 5^6 \times (4i)^0 + \binom{6}{1} \times 5^5 \times (4i)^1 + \binom{6}{2} \times 5^4 \times (4i)^2 \\
&\quad + \binom{6}{3} \times 5^3 \times (4i)^3 + \binom{6}{4} \times 5^2 \times (4i)^4 + \binom{6}{5} \times 5^1 \times (4i)^5 \\
&\quad + \binom{6}{6} \times 5^0 \times (4i)^6 \\
&= 15625 + 75000i + 150000i^2 + 160000i^3 + 96000i^4 \\
&\quad + 30720i^5 + 4096i^6 \\
&= 15625 + 75000i - 150000 - 160000i + 96000 + 30720i - 4096 \\
&= -42471 - 54280i
\end{aligned}$$

(2).(a).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{7} (1+i)^k &= \frac{1-(1+i)^8}{1-(1+i)} \\
&= \frac{1-16}{-i} \\
&= \frac{15}{i} \\
&= -15i
\end{aligned}$$

(b).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{6} (1-i)^k &= \frac{1-(1-i)^6}{1-(1-i)} \\
&= \frac{1-(8+8i)}{i} \\
&= \frac{-7-8i}{i} \\
&= -8+7i
\end{aligned}$$

(c).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{4} (2-3i)^k &= \frac{1-(2-3i)^5}{1-(2-3i)} \\
&= \frac{1-(122+597i)}{-1+3i} \\
&= \frac{-121-597i}{-1+3i} \\
&= -167+96i
\end{aligned}$$

(d).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{5} (5+4i)^k &= \frac{1-(5+4i)^6}{1-(5+4i)} \\
&= \frac{1-(-42471-54280i)}{-4-4i} \\
&= \frac{42472+54280i}{-4-4i} \\
&= -12094-1476i
\end{aligned}$$