Exercice| [2036] | 1| Calculs de sommes

Soient k, p et n trois entiers vérifiant $0 \leq k \leq p \leq n$.

(1). Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

(2). En déduire une expression simplifiée de $S = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Pistes de réflexion

(1). Revenir à l'écriture des coefficients binomiaux à l'aide de factorielles et procéder à quelques simplifications et transformations d'écritures.

(2). Utiliser la question précédente pour pouvoir mettre un coefficient binomial en facteur dans cette somme (il ne devra donc pas dépendre de l'indice de sommation) puis reconnaître une somme bien connue !

Éléments de correction

(1). Pour k, p, n entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}\,\frac{p!}{k!(p-k)!} \\
&= \binom{p}{k}\binom{n}{p}
\end{aligned}$$

(2). Ainsi, $S = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}$ soit $S = 2^p\binom{n}{p}$.