Exercice| [2025] | 1| Équivalents

Donner équivalent simple des fonctions suivantes :

(1). $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)} - 1$ en 0 ;

(2). $g(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(1+x)$ en 0 ;

(3). $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(\sin(x))}$ en 0.

Pistes de réflexion

(1). On remarque que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et on a quasiment notre équivalent.

(2). On remarque que $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et que $\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ avec $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$ ce qui laisse penser que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$, ce qu'il reste à établir.

(3). La clé résidera dans le fait que $\sin(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \times x$ pour réussir à écrire que $\ln(\sin(x)) = \ln(x) + \underset{x\to 0}{o}(\ln(x))$ ce qui assurera le fait que $\ln(\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$ et par suite l'équivalent recherché.

Éléments de correction

(1). Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x)$ et comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

(2). On a directement que : $\forall x \geq -1,\ f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(1+x)$.

Par ailleurs, on a : $\forall x \geq -1,\ \dfrac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Or puisque $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ ce qui assure que $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

De même puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Par conséquent, on en déduit que $\dfrac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$ et donc que $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$

(3). On remarque que :

$$\begin{aligned}\ln(\sin(x)) &= \ln\left(\frac{\sin(x)}{x} \times x\right)\\ &= \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x)\end{aligned}$$

Or puisque $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a : $\dfrac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par quotient.

Ainsi, $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = \underset{x\to 0}{o}(\ln(x))$.

Par conséquent, on a $\ln(\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$ et donc que $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.