Exercice| [1948] | 1| Fonction paire et impaire

Dans chaque cas, donner le domaine de définition de la fonction f puis en étudier la parité.

(1). $f : x \longmapsto (x-3)^2 - (x+3)^2$;

(2). $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-4}$;

(3). $f : x \longmapsto \dfrac{|x|}{x^3-4x}$.

Pistes de réflexion

Pour chacune des trois fonctions :

- on identifiera les opérations qui conditionnent la réalisation du processus de calcul qui les définit, et on traduira cela sous forme d'équations ou d'inéquations que l'on résoudra ;
- on s'assure que leur domaine de définition est symétrique par rapport à 0 ;
- on compare ensuite les expressions de $f(-x)$ et de $f(x)$.

Éléments de correction

(1). L'expression $(x-3)^2 - (x+3)^2$ est clairement définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Par suite, le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
Il est immédiat que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0.
Et on a directement que :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) & = & (-x-3)^2 - (-x+3)^2 \\ & = & (-(x+3))^2 - (-(-x+3))^2 \\ & = & = (x+3)^2 - (x-3)^2 \\ & = & f(x) \end{array}$$

et par suite, f est une fonction paire.

(2). L'expression $\sqrt{x^2-4}$ n'a de sens que si x^2-4 est positif.
La fonction polynôme $x \longmapsto x^2-4$ est un fonction polynôme de degré 2 qui s'annule en 2 et -2, et dont le signe du coefficient de degré 2 est $1 > 0$. Par suite, on en déduit le signe de l'expression x^2-4 :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

et par conséquent, on en déduit que $\mathcal{D}_f =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$.
Il est immédiat que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0.
Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) & = & \sqrt{(-x)^2-4} \\ & = & \sqrt{x^2-4} \\ & = & f(x) \end{array}$$

et par suite f est une fonction paire.

(3). L'expression $\dfrac{|x|}{x^3-4x}$ n'a de sens que si son dénominateur ne s'annule pas.
Il est immédiat que :

$$\begin{array}{rcl} (x^3-4x=0) & \Leftrightarrow & (x(x^2-4)=0) \\ & \Leftrightarrow & ((x=0) \text{ ou } (x^2-4=0)) \\ & \Leftrightarrow & (x \in \{-2,0,2\}) \end{array}$$

et par conséquent, on en déduit que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty;-2[\cup]-2;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$.

Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est clairement symétrique par rapport à 0.
Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) & = & \dfrac{|-x|}{(-x)^3 - 4\times(-x)} \\ & = & \dfrac{|x|}{-x^3+4x} \\ & = & \dfrac{|x|}{-(x^3-4)} \\ & = & -\dfrac{|x|}{x^3-4} \\ & = & -f(x) \end{array}$$

et par suite f est une fonction impaire.