Exercice| [1924] | 1| Radicaux et quantité conjuguée

Pour chacune des questions ci-après, on détaillera l'ensemble des calculs effectués.

(1). (a). Calculer $\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)$.

(b). En déduire que $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\sqrt{7}+\sqrt{6}$.

(c). Peut-on généraliser ce résultat en écrivant que $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$? Justifier votre réponse.

(2). En s'inspirant de ce qui a été fait précédemment, montrer que :

(a). $\dfrac{4}{2-\sqrt{2}}=4+2\sqrt{2}$;

(b). $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$;

(c). $\dfrac{3-5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=21-13\sqrt{3}$;

(d). $\dfrac{5+\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}}=-5+2\sqrt{10}$.

Éléments de correction

(1). (a). En remarquant qu'il s'agit de l'identité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, il vient directement :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right) &= \left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2\\ &= 7-6\\ &= 1\end{aligned}$$

(b). On ne change pas la valeur d'un quotient en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} &= \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}\\ &\underset{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})=1}{=} \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{1}\\ &= \sqrt{7}-\sqrt{6}\end{aligned}$$

(c). Soit n un entier naturel quelconque. Sur le même principe :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Or : $$\begin{aligned}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) &= \left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2\\ &= n+1-n\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.

(2). Il s'agit de « faire disparaître » les radicaux présent au dénominateur des différents quotients proposés. Pour cela, on utilise l'identité remarquable précédemment rencontrée : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

(a). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\frac{4}{2-\sqrt{2}} &= \frac{4}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\\ &= \frac{4\left(2+\sqrt{2}\right)}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\ &= \frac{4\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2}\\ &= \frac{4\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\\ &= 2\left(2+\sqrt{2}\right)\\ &= 4+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(b). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-2\sqrt{2}} &= \frac{1}{3-2\sqrt{2}}\times\frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\\ &= \frac{3+2\sqrt{2}}{3^3-\left(2\sqrt{2}\right)^2}\\ &= \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8}\\ &= \frac{3+2\sqrt{2}}{1}\\ &= 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(c). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\frac{3-5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} &= \frac{3-5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\ &= \frac{\left(3-5\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \frac{6-3\sqrt{3}-10\sqrt{3}+15}{4-3}\\ &= \frac{21-13\sqrt{3}}{1}\\ &= 21-13\sqrt{3}\end{aligned}$$

(d). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\frac{5+\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}} &= \frac{5+\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}}\times\frac{3-\sqrt{10}}{3-\sqrt{10}}\\ &= \frac{\left(5+\sqrt{10}\right)\left(3-\sqrt{10}\right)}{3^3-\left(\sqrt{10}\right)^2}\\ &= \frac{15-5\sqrt{10}+3\sqrt{10}-10}{9-10}\\ &= \frac{5-2\sqrt{10}}{-1}\\ &= -5+2\sqrt{10}\end{aligned}$$