Exercice| [1898] | 1| Familles de vecteurs

Soient $v_1 = (1,2,3,4)$ et $v_2 = (1,-2,3,-4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

(1). Peut-on déterminer deux réels x et y pour que $(x,1,y,1) \in \text{Vect}\ (v_1, v_2)$?

(2). Et pour que $(x,1,1,y) \in \text{Vect}\ (v_1, v_2)$?

Pistes de réflexion

(1). On commence par traduire le fait que $(x,1,y,1) \in \text{Vect}\ (v_1, v_2)$ par l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,1,y,1) = \alpha v_1 + \beta v_2$ qui conduira à l'écriture d'un système linéaire dont il s'agira d'étudier la compatibilité.

(2). On reproduit le même raisonnement avec le vecteur $(x,1,1,y)$.

Éléments de correction

(1). Par définition :

$$\begin{aligned}((x,1,y,1) \in \text{Vect}\ (v_1,v_2)) &\Leftrightarrow \left(\exists\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ (x,1,y,1) = \alpha v_1 + \beta v_2\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Le système de représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & y \\ 4 & -4 & 1 \end{array}\right) \text{est compatible}\end{array}\right)\end{aligned}$$

Par échelonnement, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & y \\ 4 & -4 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & 1-2x \\ 0 & 0 & y-3x \\ 0 & -8 & 1-4x \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_2 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & 1-2x \\ 0 & 0 & y-3x \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

qui est clairement un système incompatible puisque la dernière ligne apporte une équation de compatibilité de la forme « 0=1 ».

Par suite, il n'existe pas $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,1,y,1) \in \text{Vect}\ (v_1, v_2)$.

(2). Par définition :

$$\begin{aligned}((x,1,1,y) \in \text{Vect}\ (v_1,v_2)) &\Leftrightarrow \left(\exists\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ (x,1,y,1) = \alpha v_1 + \beta v_2\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Le système de représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & y \end{array}\right) \text{est compatible}\end{array}\right)\end{aligned}$$

Par échelonnement, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & y \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & 1-2x \\ 0 & 0 & 1-3x \\ 0 & -8 & y-4x \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_2 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & 1-2x \\ 0 & 0 & 1-3x \\ 0 & 0 & y-2 \end{array}\right)$$

Ce système est alors compatible si, et seulement si, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfait aux conditions $\left\{\begin{array}{l} 1-3x=0 \\ y=2=0 \end{array}\right.$, c'est à dire lorsque $x = \dfrac{1}{3}$ et $y = 2$.

Par conséquent, il existe bien $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$ tel que $(x,1,1,y) \in \text{Vect}\ (v_1, v_2)$.