Exercice| [1895] | 1| Système non linéaire

Résoudre le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$ d'inconnues x, y et z réels strictements positifs.

Pistes de réflexion

- Ce n'est pas un système linéaire, donc on ne peut pas y appliquer l'algorithme de Gauss !
- L'indication $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ doit nous mettre la puce à l'oreille...
- Le problème est de se ramener à un système linéaire, c'est à dire où il y a des sommes et non des produits.
- Et quoi de mieux qu'un logarithme pour transformer un produit en somme !
- On a alors un système linéaire dont les inconnues sont alors...

Éléments de correction

Puisque l'on suppose que $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, ce système est alors équivalent à :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\ln(x) + 2\ln(y) + 6\ln(z) = 0 \\ 4\ln(x) + 5\ln(y) + 12\ln(z) = \ln(2) \\ 2\ln(x) + 2\ln(y) + 5\ln(z) = \ln(3) \end{cases}$$

En posant $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$, on doit donc résoudre le système linéaire $\mathcal{S}'$: $\begin{cases} 3X + 2Y + 6Z = 0 \\ 4X + 5Y + 12Z = \ln(2) \\ 2X + 2Y + 5Z = \ln(3) \end{cases}$.

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 12 & \ln(2) \\ 2 & 2 & 5 & \ln(3) \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 4 & \ln(2) \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & \ln(3) \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{7}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 4 & \ln(2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \ln(3) - \frac{2}{7}\ln(2) \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 28L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 42L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 42\ln(3) - 12\ln(2) \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 & -7\ln(2) + 28\ln(3) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \ln(3) - \frac{2}{7}\ln(2) \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{6}{7}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 18\ln(3) - 6\ln(2) \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 & -7\ln(2) + 28\ln(3) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \ln(3) - \frac{2}{7}\ln(2) \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{3}{7}L_2 \\ L_3 \leftarrow -7L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\ln(2) + 6\ln(3) \\ 0 & 1 & 0 & -3\ln(2) + 12\ln(3) \\ 0 & 0 & 1 & -7\ln(3) + 2\ln(2) \end{array}\right)$$

et on en déduit : $\begin{cases} X = -2\ln(2) + 6\ln(3) \\ Y = -3\ln(2) + 12\ln(3) \\ Z = -7\ln(3) + 2\ln(2) \end{cases}$ puis que $\begin{cases} x = \mathrm{e}^X = \dfrac{3^6}{4} = \dfrac{729}{4} \\ y = \mathrm{e}^Y = \dfrac{3^{12}}{2^4} = \dfrac{531441}{8} \\ z = \mathrm{e}^Z = \dfrac{4}{3^7} = \dfrac{4}{2187} \end{cases}$.

CC BY NC ND