Exercice| [1885] | 1| Calculs de limites avec croissances comparées

Compléter les éléments ci-dessous pour déterminer les limites des fonctions f ci-dessous aux points considérés.

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x} - 3x^2 - 1$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \ln(x) - x^2$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \sqrt{x} - \ln(x)$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto x\sqrt{x}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^3$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \dfrac{x^3 - 1}{\mathrm{e}^{x} - x}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto x\ln(x) - x + 1$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - \ln(x)}{\ln(x) - x}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

$f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^{x}}$ | Limite en $+\infty$

Transformation de $f(x)$ utilisée pour le calcul de la limite

Conclusion

$f(x) \underset{x\to\ldots}{\longrightarrow} \ldots$

Pistes de réflexion

Pour chacune des limites à calculer :
- On identifiera le terme prépondérant qui est donné par les formules de croissances comparées
- On factorisera par ce dernier
- On procèdera ensuite au calcul de la limite correspondant

Éléments de correction

$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x} - 3x^2 - 1$ | Limite en $+\infty$

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(1 - 3\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)$

Par croissances comparées, on sait que $\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, il est clair que $\mathrm{e}^{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, par somme $1-3\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x}}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et par conséquent par produit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$f : x \longmapsto \ln(x) - x^2$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x > 0,\ f(x) = x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1\right)$

Par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par somme $\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

Ainsi, par produit puisque $x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

$f : x \longmapsto \sqrt{x} - \ln(x)$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x > 0,\ f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$

Par croissances comparées, on a $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par somme $1-\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Comme $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par produit, il vient que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$f : x \longmapsto x\sqrt{x}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^3$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x > 0,\ f(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\right)^3$

Par croissances comparées, $x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\left.\begin{array}{rcl} x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x} & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & 0 \\ X^3 & \underset{X\to 0}{\longrightarrow} & 0 \end{array}\right\} \text{donc par composition, } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$f : x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{\mathrm{e}^{x} - x}$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{x}} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}}$

Comme $\dfrac{1}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par somme $1-\dfrac{1}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par croissances comparées, $\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par somme $1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Finalement par quotient $\dfrac{1-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par croissances comparées, $\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ainsi, par produit, il vient que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$f : x \longmapsto x\ln(x) - x + 1$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x > 0,\ f(x) = x\left(\ln(x) - 1\right) + 1$
Comme $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par somme $\ln(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Donc par produit $x\left(\ln(x)-1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et par somme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - \ln(x)}{\ln(x) - x}$ | Limite en $+\infty$

On a clairement que : $\forall x > 0,\ f(x) = x \times \dfrac{1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}}{\dfrac{\ln(x)}{x} - 1}$

Par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc par somme $1-\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{\ln(x)}{x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

Donc par quotient $\dfrac{1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}}{\dfrac{\ln(x)}{x}-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ et par produit, on en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

$f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ | Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \\ \mathrm{e}^{X} & \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \end{array}\right\} \text{donc par composition } \mathrm{e}^{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, par produit, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^{\,x}}$ | Limite en $+\infty$

Il est clair que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\,x}}$

Par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{x}{\mathrm{e}^{\,x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne par produit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.