Exercice| [1855] | 1| Avec une valeur absolue

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - |x|}{|x^2 - 1|}$.

(1). Déterminer le domaine de définition de la fonction.

(2). Étudier la parité de f.

Pistes de réflexion

(1). On remarquera que l'expression n'a de sens que si son dénominateur ne s'annule pas.

(2). On s'assurera que le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0, puis on comparera l'expression de $f(-x)$ et celle de $f(x)$.

Éléments de correction

(1). L'expression $\dfrac{x^2 - |x|}{|x^2 - 1|}$ n'a de sens que si son dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire lorsque $\left|x^2 - 1\right|$ ne s'annule pas.
Or on a : $\left(\left|x^2 - 1\right| = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - 1 = 0\right)$.
Il est par ailleurs immédiat que : $\left(x^2 - 1 = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in \{-1, 1\})$.
Par suite, le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

(2). Il est clair que le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0.
Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) &= \frac{(-x)^2 - |-x|}{|(-x)^2 - 1|} \\ &= \frac{x^2 - |x|}{|x^2 - 1|} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

et par suite f est une fonction paire.