Exercice| [1823] | 1| Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donner les résultats sous forme algébrique.

(1). $(2-\mathrm{i})z = 4-\mathrm{i}$; | **(2).** $\dfrac{1}{2z-\mathrm{i}} = -1+2\mathrm{i}$; | **(3).** $\dfrac{z+\mathrm{i}}{2z-\mathrm{i}} = 5$.

Pistes de réflexion

- On résout ces équations avec les techniques habituelles, en isolant dans un des deux membres l'inconnue z.
- On n'oubliera pas de donner les solutions sous forme algébrique.

Éléments de correction

(1). On a clairement que : $\left((2-\mathrm{i})\,z = 4-\mathrm{i}\right) \underset{2-\mathrm{i}\neq 0}{\Leftrightarrow} \left(\dfrac{4-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)$

Or on a :

$$\begin{aligned}\frac{4-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} &= \frac{(4-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}\\ &= \frac{8+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2^2+1^2}\\ &= \frac{8+2\mathrm{i}+1}{5}\\ &= \frac{9+2\mathrm{i}}{5}\\ &= \frac{9}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\end{aligned}$$

Donc l'équation considérée admet une unique solution : $z = \dfrac{9}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.

(2). Sous l'hypothèse $z \neq \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2z-\mathrm{i}} = -1+2\mathrm{i}\right) &\Leftrightarrow \left(1 = (-1+2\mathrm{i})(2z-\mathrm{i})\right)\\ &\Leftrightarrow \left(1 = -2z+\mathrm{i}+4\mathrm{i}z-2\mathrm{i}^2\right)\\ &\Leftrightarrow \left(1 = z(-2+4\mathrm{i})+\mathrm{i}+2\right)\\ &\Leftrightarrow \left(z(-2+4\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-\mathrm{i}}{-2+4\mathrm{i}}\right)\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\frac{-1-\mathrm{i}}{-2+4\mathrm{i}} &= \frac{(-1-\mathrm{i})(-2-4\mathrm{i})}{(-2+4\mathrm{i})(-2-4\mathrm{i})}\\ &= \frac{2+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{2^2+4^2}\\ &= \frac{2+6\mathrm{i}-4}{20}\\ &= \frac{-2+6\mathrm{i}}{20}\\ &= -\frac{2}{20}+\frac{6}{20}\mathrm{i}\\ &= -\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\end{aligned}$$

Donc l'équation considérée admet une unique solution : $z = -\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}\mathrm{i}$.

(3). Sous l'hypothèse $z \neq \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{2z-\mathrm{i}} = 5\right) &\Leftrightarrow \left(z+\mathrm{i} = 5(2z-\mathrm{i})\right)\\ &\Leftrightarrow \left(z+\mathrm{i} = 10z+5\right)\\ &\Leftrightarrow \left(-9z = -6\mathrm{i}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(z = \frac{2}{3}\mathrm{i}\right)\end{aligned}$$

Donc l'équation considérée admet une unique solution : $z = \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$.