Exercice| [1820] | 1| Fonction logarithme

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$.

(1). Déterminer son domaine de définition.

(2). f est-elle impaire ? Justifier.

Pistes de réflexion

(1). On se souviendra que la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est définie sur $]0;+\infty[$, donc il s'agira d'étudier le signe de l'expression $\dfrac{3+x}{3-x}$.

(2). On commence par s'assurer que le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0, puis on comparera l'expression de $f(-x)$ avec celle de $f(x)$ en utilisant au mieux les propriétés de la fonction logarithme.

Éléments de correction

(1). L'expression $\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$ n'a de sens que si l'expression $\dfrac{3+x}{3-x}$ a du sens, c'est à dire que son dénominateur ne s'annule pas, et que cette dernière est strictement positive.
Il est immédiat que : $(3-x=0) \quad \Leftrightarrow \quad (x=3)$
Par ailleurs la fonction affine $x \longmapsto 3-x$ étant décroissante sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 3, et la fonction affine $x \longmapsto 3+x$ étant croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en -3, on en déduit le signe des deux expressions $3-x$ et $3+x$:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
Signe de $3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{3+x}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On en déduit que le domaine de défintion $\mathcal{D}_f$ de f est $\mathcal{D}_f =]-3;3[$.

(2). Le domaine de définition de f est clairement symétrique par rapport à 0, et on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-3;3[\,,\ f(-x) &= \ln\left(\frac{3+(-x)}{3-(-x)}\right)\\
&= \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{\dfrac{3+x}{3-x}}\right)\\
&= -\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)\\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

et par suite, la fonction f est une fonction impaire.