Exercice| [1781] | 1| Sommes

Soit n un entier naturel non nul.

(1). Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

(2). On considère un réel $p\in\,]0;1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

(3). Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$.

(4). Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k+1}k=3n4^{n-1}$.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit d'appliquer la formule du binôme de Newton pour des valeurs pertinentes.

(2). La formule du binôme de Newton donne directement la réponse.

(3). Il s'agira de transformer le terme général de la somme à partir de l'écriture du coefficient binomial pour faire apparaître un autre coefficient binomial et une somme qui s'approche de la formule du binôme de Newton.

(4). On s'inspire des transformations réalisées à la question précédente pour calculer cette somme.

Éléments de correction

(1). On sait que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall(a,b)\in\mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=(a+b)^n$.

Donc en particulier pour $a=1$ et $b=1$, il vient que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{1^{n-k}}_{=1}\underbrace{1^k}_{=1}\\ &= (1+1)^n\\ &= 2^n\end{aligned}$$

(2). Toujours d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} &= (1+(1-p))^n\\ &= 1^n\\ &= 1\end{aligned}$$

(3). On commence par remarquer que le premier terme de la somme étant nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$$

Or on a : $\forall k\in[\![1;n]\!],\quad k\binom{n}{k}$

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &\underset{k!=k\times(k-1)!}{=} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}\\ &\underset{n!=n\times(n-1)!}{=} n\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}\\ &= n\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\\ &\underset{i=k-1}{=} n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\\ &= n\times 2^{n-1}\end{aligned}$$

(4). D'après les calculs précédents, on peut écrire directement que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}3^{n-k+1} &= 3n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}3^{n-k}\\ &\underset{i=k-1}{=} 3n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}3^{n-i-1}\\ &= 3n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}3^{n-1-i}\underbrace{1^i}_{=1}\\ &= 3n\,(3+1)^{n-1}\\ &= 3n4^{n-1}\end{aligned}$$