Exercice| [1780] | 1| Sommes

Soit n un entier naturel non nul, et $a_0, \ldots, a_{n+1}$ des nombres réels. Simplifier l'expression suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1})$.

Pistes de réflexion

- On remarque que $2 - 3 + 1 = 0$, ce qui nous fait dire que les termes de même indice qui apparaîtront dans la somme s'annuleront. Il reste donc à déterminer quels termes restent. . .
- Pour ce faire, on utlisera la linéarité du symbole $\sum$ et des changements d'indices pour mettre en évidence les termes qui s'éliminent et ceux qui restent.

Éléments de correction

On peut commencer par écrire que :

$$\sum_{k=1}^{n}(2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1}) = 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}}_{S_1} - 3\sum_{k=1}^{n} a_k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}}_{S_2}$$

Dans la somme S_1, on effectue alors le changement d'indices :

Relation entre les indices :	$i = k+1$			
Transformation des bornes :	quand	$k = 1$	on a :	$i = 2$
	quand	$k = n$	on a :	$i = n+1$

et dans la somme S_2, on effectue le changement d'indices :

Relation entre les indices :	$j = k-1$			
Transformation des bornes :	quand	$k = 1$	on a :	$j = 0$
	quand	$k = 1$	on a :	$j = n-1$

pour obtenir au final que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1}) &= 2\sum_{i=2}^{n+1} a_i - 3\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \\ &= 2\sum_{k=2}^{n+1} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\end{aligned}$$

On peut alors regrouper ces trois sommes sur leur plage commune d'indexation qui est dans notre cas ici $[\![2; n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1}) &= 2\sum_{k=2}^{n+1} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \underbrace{\underbrace{\sum_{k=2}^{n-1}(2a_k - 3a_k + a_k)}_{\substack{\textbf{Regroupement des trois sommes}\\ \textbf{sur la plage commune d'indexation}}}}_{=0} + \underbrace{2\,(a_n + a_{n+1})}_{\substack{\textbf{Termes restants de}\\ \textbf{la première somme}}} - \underbrace{3\,(a_1 + a_n)}_{\substack{\textbf{Termes restants de}\\ \textbf{la deuxième somme}}} \\ &= 2a_n + 2a_{n+1} - 3a_1 - 3a_n \\ &= 2a_{n+1} - a_n - 3a_1\end{aligned}$$